

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRUNG TÂM LUYỆN THI THỦ KHOA





CHUYÊN ĐỀ PT-BPT

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY TRONG TÌM KIẾM LỜI GIẢI

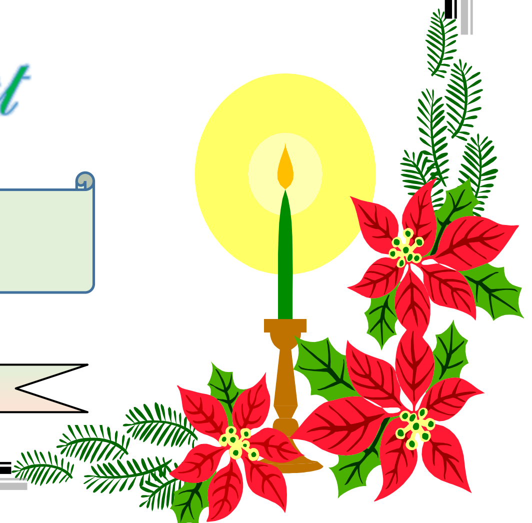


Mai Xuân Việt



Hồ Chí Minh - Năm 2012





PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP

PHẦN 1: XÁC ĐỊNH SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Việc biết một phương trình có bao nhiêu nghiệm, nghiệm đó là nghiệm vô tỷ hay hữu tỷ vô cùng quan trọng. Để biết rõ hơn ta tham khảo một phương trình dưới đây:

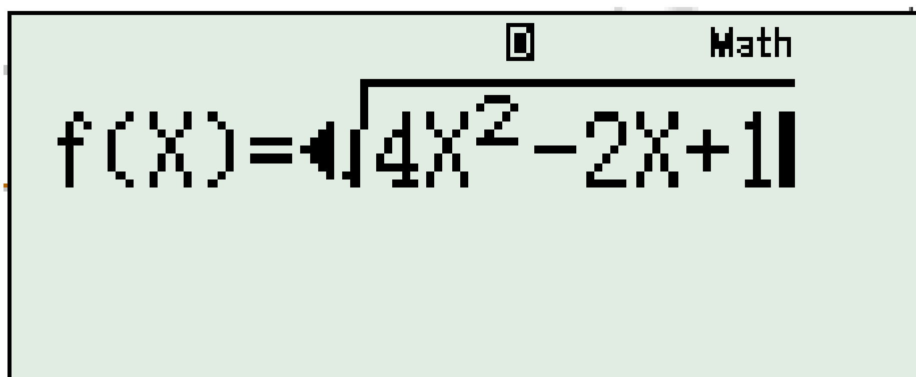
Cho phương trình sau: $x^4-2x^3-x+1=\sqrt{4x^2-2x+1}$.

Phân tích:

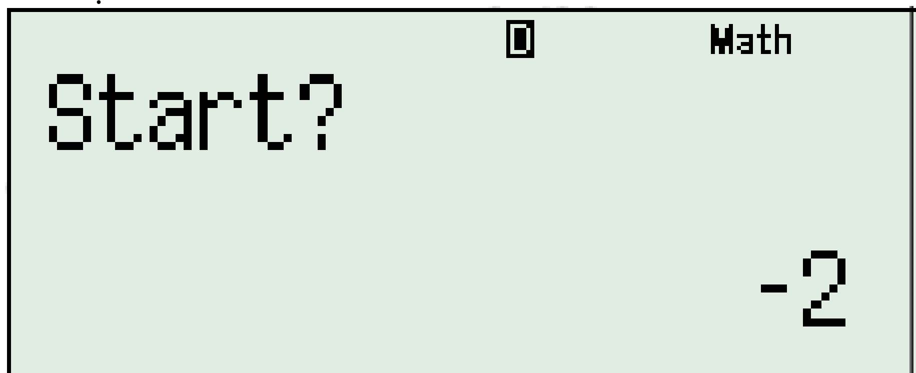
Ta thực hiện việc tìm kiếm lời giải theo các bước sau:

Bước 1: Sử dụng máy tính cầm tay, truy cập vào chức năng **TABLE** (***MODE 7***) và nhập vào hàm số:

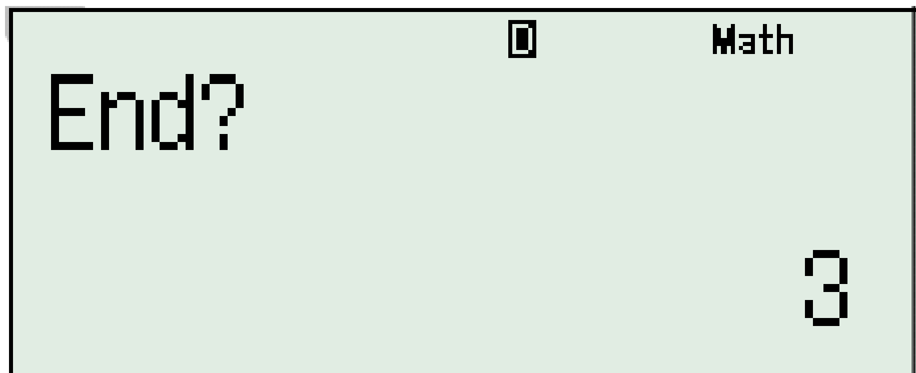
$F(X)=X^4-2X^3-X+1-\sqrt{4X^2-2X+1}$ như hình bên dưới:



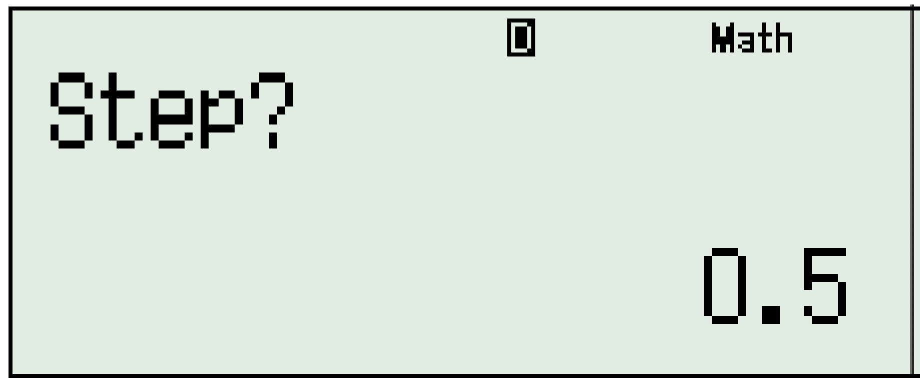
Bước 2: Ấn dấu = và chọn giá trị START = -2. START là giá trị bắt đầu, thường được đối chiếu với điều kiện để xác định.



Bước 3: Ấn dấu = và chọn giá trị END = 3. END là giá trị kết thúc, thường được đối chiếu với điều kiện để xác định.



Bước 4: Ấn dấu = chọn giá trị STEP = 0.5. STEP là giá trị bước nhảy hay còn gọi là khoảng cách giữa các giá trị biến số.



Bước 5: Bấm = để nhận bảng giá trị của hàm số với các giá trị x tương ứng để chọn ở trên. Nhìn vào bảng giá trị ta thấy khi $x=0$ thì $f\left(x\right)=0$ hay $x=0$ là một nghiệm của hàm số.

	X	F(X)
4	-0.5	0.0804
5	0	0
6	[illegible]	-0.687

0.5

Ngoài ra ta thấy hàm số còn đổi dấu khi x từ 2 đến 2.5, suy ra phương trình có ít nghiệm một nghiệm trong khoảng $\left(2;2.5\right)$ ngoài nghiệm $x=0$ thấy ở trên.

	X	F(X)
9	2	-4.605
10	2.5	1.7299
11	[illegible]	19.432

3

Vì từ bước nhảy của x từ -0.5 đến 0 có $x=0$ là một nghiệm của phương trình nên trong khoảng $\left(-0.5;0\right)$ phương trình có đổi dấu hay không nên tại khoảng này ta khảo sát kỹ hơn bằng TABLE xem sao. Chọn START = -0.5, END = 0, STEP = 0.1 và ta nhận thấy phương trình còn ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $\left(-0.5;-0.4\right)$ nữa.

	X	F(X)
5	-0.6	0.2537
6	-0.5	0.0804
7	-0.4	[illegible]

$-8.44993518 1\times10^{-3}$

Bước 6: Bây giờ ta dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay (ở đây mình sử dụng 570VN-LPUS) để tìm nghiệm của phương trình trong hai khoảng $(-0.5;-0.4)$ và $(2;2.5)$.

- Với $x\in(-0.5;-0.4)$ ta chọn giá trị ban đầu để máy tính dò nghiệm, thường là giá trị trung bình của khoảng nghiệm $\frac{(-0.5)+(-0.4)}{2}=-0.45$ hay ta có thể chọn bất kỳ giá trị nào trong khoảng củng được, chọn càng gần giá trị của nghiệm thì máy tính dò càng nhanh.
  Ta tìm được nghiệm của phương trình là $x\approx-0.414213562=1-\sqrt{2}$.
- Với $x\in(2;2.5)$ ta chọn giá trị ban đầu để máy tính dò nghiệm là $\frac{2+2.5}{2}=2.125$, tương tự như trên, ta có thể chọn giá trị 2.2 hay 2.3 đều được tuỳ các bạn.
  Ta tìm được nghiệm của phương trình là $x\approx 2.414213562=1+\sqrt{2}$.

Như vậy máy tính hỗ trợ ta tìm được 3 nghiệm của phương trình là $x=0, x=1\pm\sqrt{2}$.
Khi đó phương trình trên ta sẽ giải như sau:

$$x^4-2x^3-x+1=\sqrt{4x^2-2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-2x+1\ge 0\\ \left(x^4-2x^3-x^2\right)+\left(x^2-x+1-\sqrt{4x^2-2x+1}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^4-2x^3-x^2\right)\left(1+\frac{1}{x^2-x+1+\sqrt{4x^2-2x+1}}\right)=0\Leftrightarrow x^4-2x^3-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vì sao lại phân tích được như thế này ta lại tiếp tục đọc ở phần dưới.

Ghi chú: Các bạn hết sức chú ý khi tìm nghiệm cần phân biệt đâu là nghiệm hữu tỷ, đâu là nghiệm vô tỷ vì khi dùng cách nhân liên hợp thì biểu thức liên hợp sẽ khác ở hai loại nghiệm này. Các bạn sẽ thấy rõ được điều này ở phần hai.

PHẦN 2: PHÂN BIỆT NGHIỆM ĐƠN - NGHIỆM BỘI VÀ CÁCH XÁC ĐỊNH

1. Nghiệm đơn

Nghiệm đơn $x=a$ là nghiệm mà tại đó phương trình $f(x)=0$ được phân tích thành nhân tử có dạng $(x-a)g(x)$ và $g(a)\ne 0$.

Ví dụ: Cho phương trình sau: $3x^2-2x-1+(x-1)\sqrt{x^2+3}=0$ (*).
Bằng việc sử dụng chức năng TABLE để xác định khoảng nghiệm và chức năng SOLVE của máy tính ta xác định được rằng phương trình có nghiệm $x=1$. Giờ mình kiểm tra thêm nghiệm này là nghiệm đơn hay nghiệm bội. Ta đặt $f(x)=3x^2-2x-1+(x-1)\sqrt{x^2+3}$.

Ta tính được $f'(x)=6x-2+\sqrt{x^2+3}+\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2+3}}$.

Ta có hệ sau: $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ là nghiệm đơn của phương trình.

Ghi chú: Việc tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ có thể tính trực tiếp bằng máy tính với chức năng tính đạo hàm mà không cần tính công thức của $f(x)$. Nhưng trong trường hợp đi thi không được sử dụng máy tính cầm tay thì các bạn nên tính luôn ra như thế này.

Ta có phương trình (*) $\Leftrightarrow (x-1)\left(3x+1+\sqrt{x^2+3}\right)=0 \Leftrightarrow x=1$

2. Nghiệm kép

Nghiệm kép $x=a$ là nghiệm mà tại đó phương trình $f(x)=0$ được phân tích thành nhân tử có dạng $(x-a)^2g(x)=0$ và $g(a)\neq 0$.

Ví dụ: Cho phương trình sau: $2x^3-3x^2-12x+20+\sqrt{x^2+x-1}=\dfrac{5(x-1)}{\sqrt{x^2+x-1}}$ (**)

Bằng việc sử dụng TABLE để xác định khoảng nghiệm và chức năng SOLVE của máy tính ta tìm được ngay nghiệm của phương trình $x=2$. Ta đi xác định đây là nghiệm đơn hay nghiệm bội của phương trình. Ta đặt $g(x)=2x^3-3x^2-12x+20+\sqrt{x^2+x-1}-\dfrac{5(x-1)}{\sqrt{x^2+x-1}}$.

Ta tính được $g'(x)=6x^2-6x-12+\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-1}}-\dfrac{5\sqrt{x^2+x-1}-5(x-1)\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-1}}}{x^2+x-1}$.

Ta có hệ sau: $\begin{cases} g(2)=0 \\ g'(2)=0 \\ g''(2)\neq 0 \end{cases}$, suy ra $x=2$ là nghiệm kép của phương trình (**).

Ta có phương trình (**) $\Leftrightarrow (x-2)^2\left(2x+5+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-1}}\right)=0 \Leftrightarrow x=2$

3. Nghiệm bội ba

Nghiệm bội ba $x=a$ là nghiệm mà tại đó phương trình $f(x)=0$ được phân tích thành nhân tử có dạng $(x-a)^3g(x)=0$ và $g(a)\neq 0$.

Ví dụ: Cho phương trình sau: $x^3+x+1=\sqrt[3]{3x^2+3x+1}$ (***)

Ta cũng dùng **TABLE** để rà sát khoảng nghiệm và **SOLVE** để giải tìm nghiệm của phương trình trong khoảng đã xác định, ta được nghiệm của phương trình là $x=0$. Ta xác định đây là nghiệm đơn hay nghiệm bội của phương trình. Đặt $h(x)=x^3+x+1-\sqrt[3]{3x^2+3x+1}$.

Ta tính được $h'(x)=3x^2+1-\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{(3x^2+3x+1)^2}}$

và $h''(x) = 6x - \dfrac{2\sqrt[3]{\left(3x^2+3x+1\right)} - \left(2x+1\right)\dfrac{2\left(2x+1\right)\left(3x^2+3x+1\right)}{\sqrt[3]{\left(3x^2+3x+1\right)^4}}}{\sqrt[3]{\left(3x^2+3x+1\right)^4}}$

Ta có hệ sau: $\begin{cases} h(0)=0 \\ h'(0)=0 \\ h''(0)=0 \\ h^{(3)}(0)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$ là nghiệm bội ba của phương trình (***).

Ta có phương trình (***) $\Leftrightarrow x^3+x+1=\sqrt[3]{3x^2+3x+1} \Leftrightarrow x^3\left(1+\dfrac{1}{x+1+\sqrt[3]{3x^2+3x+1}}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Và cứ thế tương tự các bạn sẽ tìm được nghiệm bội bậc 4, bậc 5, bậc 6, …
Nhưng trong khuôn khổ chương trình THPT thì các bạn chỉ nên quan tâm tới 3 loại trên là nghiệm đơn, nghiệm kép và nghiệm bội ba là quá đủ rồi.

Chú ý: Nhiều bạn sẽ gặp khó khăn khi xác định nghiệm bội vì đạo hàm nhiều cấp của các biểu thức chứa căn thức nói chung là rất phức tạp và cũng tốn rất nhiều thời gian nên mình sẽ hướng dẫn các bạn làm một các khác tiết kiệm thời gian hơn rất nhiều.

Cơ sở lý thuyết: Như các bạn đã biết đối với nghiệm bội lẻ (nghiệm bội 1, 3, 5, 7, …) thì giá trị biểu thức sẽ đổi dấu khi đi qua nghiệm còn đối với nghiệm bổi chẵn (nghiệm bội 2, 4, 6, 8, …) thì giá trị biểu thức sẽ không đổi dấu khi đi qua nghiệm. Mặc khác trong chương trình THPT chúng ta chỉ cần quan tâm tới việc phân biệt ba loại nghiệm đó là : nghiệm đơn, nghiệm kép và nghiệm bội ba. Trong đó nghiệm đơn và nghiệm bội ba là nghiệm bậc lẻ, nghiệm kép là nghiệm bậc chẵn. Vậy ta sẽ phân biệt như sau:

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2-5=\sqrt{x+5}$.

Dùng chức năng SOLVE ta tìm được 1 nghiệm của phương trình trên là $x\approx -2.561552813$.

Giá trị này sẽ mặc định lưu tại biến X của máy tính. Ta thay biến X bởi biến A đánh vào màn hình như sau:

Bấm CALC nhập X + 0.00000001 và bấm = ta được kết quả:

Bấm CALC nhập X – 0.00000001 và bấm = ta được kết quả:

Dễ thấy $f(x+0.00000001)$ và $f(x-0.00000001)$ trái dấu nhau, có nghĩa là qua nghiệm $x\approx -2.561552813$ biểu thức đổi dấu. ở đây ta chọn đại lượng 0.00000001 là một đại lượng khá an toàn để đảm bảo rằng trong khoảng $(x;x+0.00000001)$ và khoảng $(x-0.00000001;x)$ không thể có nghiệm nào khác.

Từ đó ta có khẳng định nghiệm $x\approx -2.561552813$ là nghiệm bội lẻ của phương trình, giờ ta chỉ cần xác định đây là nghiệm đơn hay bội ba nữa là xong. Ta xác định như sau:

- Gán nghiệm X lúc nãy cho biến A để lưu trữ.

- Tính đạo hàm biểu thức $f(x)$ tại $x=A$.

Ta thấy $f'(x)_{x\approx -2.561552813}\neq 0$ suy ra $x\approx -2.561552813$ là nghiệm đơn của phương trình.

Ta bắt đầu đi tìm đại lượng để liên hợp. Để ý thấy đây là một nghiệm vô tỷ và mình không biết chính xác giá trị đúng của nó là bao nhiêu nên không thể tách liên hợp ra ngay nó là $(x-a)$ mà ta tách liên hợp dựa vào một đại lượng vô tỷ khác đó là biểu thức có chứa x. Phương pháp làm ở đây là chúng ta sẽ tính giá trị tất cả các căn thức có chứa trong phương trình và so sánh giá trị đó với x để đưa ra biểu thức liên hợp với từng căn trong đó.

Với bài này, ta có: $\sqrt{x+5}\approx 1.561552813$ với $x\approx -2.561552813$ ta suy ra $\sqrt{x+5}=-x-1$

Vậy phương trình sẽ được phân tích thành:

$$\left(x^2+x-4\right)=\sqrt{x+5}+x+1\Leftrightarrow\left(x^2+x-4\right)-\left(\sqrt{x+5}+x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-4\right)\left(1-\frac{1}{x+1-\sqrt{x+5}}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2+x-4=0 & (1)\\ x+1-\sqrt{x+5}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Chú ý: Trước khi giải luôn nhớ ghi điều kiện của phương trình, ở đây nhiều bạn hơi "vội vã" nên thường quên cái này dẫn tới nhận dư nghiệm. Như bài ở trên thì điều kiện của phương trình là

$$-5 \le x \le -\sqrt{5} \ \vee \ x \ge \sqrt{5}.$$

Đây là cách nếu chúng ta sử dụng khi đã quá "bí" hướng đi bằng tư duy thuần tuý, giúp một số bạn trình độ vừa phải nhưng vẫn giải được mấy bài phương trình - bất phương trình vô tỷ hơi phức tạp bằng sự hỗ trợ của máy tính cầm tay.

Ngoài ra mình cũng xin giới thiệu với các bạn 4 cách giải khác khi sử dụng tư duy bình thường không có sự hỗ trợ của máy tính cầm tay, các bạn có thể tham khảo bên dưới:

***Cách 1*: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ**

Giải phương trình: $x^2 - 5 = \sqrt{x+5}$

Điều kiện: $-5 \le x \le -\sqrt{5} \ \vee \ x \ge \sqrt{5}$

Đặt $y = \sqrt{x+5} \ge 0$, khi đó ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 - 5 = y \\ y^2 - 5 = x \end{cases} \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = x \\ \sqrt{x+5} = -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -1 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

***Cách 2*: Sử dụng phương pháp dồn tổng bình phương**

Giải phương trình: $x^2 - 5 = \sqrt{x+5}$

Điều kiện: $-5 \le x \le -\sqrt{5} \ \vee \ x \ge \sqrt{5}$

$$x^2 - 5 = \sqrt{x+5} \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = x + 5 + \sqrt{x+5} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x+5} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{2} = \sqrt{x+5} + \dfrac{1}{2} \\ x + \dfrac{1}{2} = -\sqrt{x+5} - \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = x \\ \sqrt{x+5} = -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -1 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

***Cách 3*: Sử dụng phương pháp tách liên hợp thông qua hằng đẳng thức**

Giải phương trình: $x^2 - 5 = \sqrt{x+5}$

Điều kiện: $-5 \le x \le -\sqrt{5} \ \vee \ x \ge \sqrt{5}$

$$x^2 - 5 = \sqrt{x+5} \Leftrightarrow \left[x^2 - (x+5)\right] + \left(x - \sqrt{x+5}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x+5}\right)\left(x + \sqrt{x+5} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = x \\ \sqrt{x+5} = -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le -1 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

***Cách 4*: Sử dụng bình phương căn bản và giải phương trình bậc 4**

$$x^2 - 5 = \sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5 \ge 0 \\ x + 5 = \left(x^2 - 5\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\sqrt{5} \vee x \ge \sqrt{5} \\ x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\sqrt{5} \vee x \ge \sqrt{5} \\ \left(x^4 - 9x^2 + \dfrac{81}{4}\right) - \left(x^2 + x + \dfrac{1}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\sqrt{5} \vee x \ge \sqrt{5} \\ \left(x^2 - \dfrac{9}{2}\right)^2 - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\sqrt{5} \vee x \ge \sqrt{5} \\ \left(x^2 - x - 5\right)\left(x^2 + x - 4\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\sqrt{5} \vee x \ge \sqrt{5} \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \vee x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{array} \right.$$

Nhận xét: Các bạn thấy đó, nếu sử dụng được tư duy một cách linh hoạt ta có thể tạo ra nhiều lời giải hay và đẹp. Cách giải dưới sự hỗ trợ của máy tính cho ta một hướng đi để chúng ta có thể giải được bài nhưng không làm cho chúng ta giỏi Toán hơn.

Ví dụ 2: Giải phương trình $x^2 + 3x + 2 = x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{3x+2}$

Dùng chức năng **SOLVE** của máy tính ta tìm được một nghiệm $x \approx 1.618033961$.

Ta tiến hành kiểm tra đây là nghiệm đơn hay nghiệm bội. Cũng tương tự như trên ví dụ 1, ta làm như sau:

- Gán giá trị x tìm được cho biến A để lưu trữ.
- Đặt $f(x) = x^2 + 3x + 2 - x\sqrt{x+1} - (x+1)\sqrt{3x+2}$.

  Ta tính được $f(A + 0.00000001) \approx 1.3425 \times 10^{-10}$

  Ta tính được $f(A - 0.00000001) \approx 1.3399 \times 10^{-10}$

  Ta có $f(A + 0.00000001) \times f(A - 0.00000001) > 0$ hay nghiệm $x = A$ là một nghiệm bội bậc chẵn của phương trình, trong khuôn khổ của chương trình THPT thì ta suy ra đây chỉ là nghiệm bội chẵn bậc 2.

Ta tiến hành tìm tất cả các đại lượng liên hợp của các căn thức chứa trong phương trình bằng cách tính giá trị tất cả các căn với giá trị nghiệm $x \approx 1.618033961$ vừa tìm được.

Thay vào các căn thức ta tính được:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}\approx 1.61803398\\ \sqrt{3x+2}\approx 2.61893397\end{cases}$$

Bằng cái nhìn trực quan, ta có đánh giá sau:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}\approx x\\ \sqrt{3x+2}\approx x+1\end{cases}$$

Vậy đại lượng liên hợp cho các căn là:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x+1}-x\right)\\ \left(\sqrt{3x+2}-x-1\right)\end{cases}$$

Vì phương trình của chúng ta có nghiệm bội 2 nên nhân tử khi tách liên hợp sẽ có dạng là

$$\left(\sqrt{x+1}-x\right)^2=x^2+x+1-2x\sqrt{x+1} \text{ và } \left(\sqrt{3x+2}-x-1\right)^2=x^2+5x+3-2(x+1)\sqrt{3x+2}\ .$$

Ta bắt đầu trình bày lời giải bài phương trình này như sau:

$$x^2+3x+2=x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{3x+2}\Leftrightarrow 2x^2+6x+4=2x\sqrt{x+1}+2(x+1)\sqrt{3x+2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x+1-2x\sqrt{x+1}\right)+\left(x^2+5x+3-2(x+1)\sqrt{3x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-x\right)^2+\left(\sqrt{3x+2}-x-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}-x=0\\ \sqrt{3x+2}-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ .$$

Nhận xét: Nếu tư duy không tốt thì sẽ rất khó giải được bài này, nhưng với sự hỗ trợ của máy tính cầm tay, chúng ta đã tìm được lời giải một cách tự nhiên mà không quá khó khăn với những người trước nay còn "yếu" trong việc giải phương trình vô tỷ.

Ví dụ 3: Giải phương trình $x\left(x^2-2x+3\right)=\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}$

Phân tích: Đầu tiên ta cũng sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay giải phương trình và tìm được 1 nghiệm là $x=1$.

Ta đi kiểm tra nghiệm này là nghiệm đơn hay nghiệm bội của phương trình trên. Ta làm như sau:

- Đặt $f(x)=x\left(x^2-2x+3\right)-\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}$. Ta định gán nghiệm cho một biến nào đó trong máy tính như vì nghiệm này hữu tỉ nên ta nhập luôn vô trong quá trình tính toán hai lân cận cho tiết kiệm thời gian.

  Ta có: $f(1+0.0001)\approx 1.5\times 10^{-12}$ và $f(1-0.0001)\approx -1.5\times 10^{-12}$

- Do $f(1+0.0001)\times f(1-0.0001)<0$ suy ra nghiệm $x=1$ là nghiệm bội bậc lẻ.

 Ghi chú: Các phương trình mũ lớn khi cho lân cận còn nhỏ thì nó sẽ dẫn tới việc mấy tính quy về 0, như trường hợp của phương trình trên, với cận là 0.00000001 thì khi thay vô nó sẽ ra kết quả bằng 0, máy tính hiển thị như vậy vì kết quả quá nhỏ. Để khắp phục tình trạng này ta chỉ cần cho cận lớn hơn xíu là được. Cụ thể ở đây mình cho cận là 0.0001.
 Trong khuôn khổ chương trình THPT ta chỉ cần kiểm tra nó là nghiệm đơn hay bội ba.
 Ta tính đạo hàm của hàm $f(x)$ tại $x=1$, ta có $f'(1)=0$ suy ra đây là nghiệm bội bậc ba.

Tiếp theo ta sẽ đi tìm đại lượng liên hợp để ra nhân tử $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$ trong bài phương trình trên. Vì đây là một nghiệm hữu tỉ nên ta tách liên hợp đơn giản như sau:

$$x\left(x^2-2x+3\right)=\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}\Leftrightarrow\left(x^3-3x^2+3x-1\right)+\left(x^2+1-\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^3+\frac{(x-1)^3(x+1)}{x^2+1+\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}=0\Leftrightarrow(x-1)^3\left[1+\frac{x+1}{\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}}\right]=0$$

Vì $x\left(x^2-2x+3\right)=\sqrt{2\left(x^3+x^2-x+1\right)}\geq 0\Rightarrow x\geq 0$ nên $1+\dfrac{x+1}{x^2+1+\sqrt{2\left(x^3+x-x+1\right)}}>0$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

4. Cách xác định nghiệm bội thần tốc bằng giới hạn

Như các em đã biết dựa vào các kiến thức liên quan ta có các cở sở để xác định nghiệm bội nhưng nhược điểm của các phương pháp trên vẫn là chưa đạt được tốc độ cần thiết, đặc biệt là nếu dụng vô các nghiệm bội bậc cao lớn hơn 3. Chính vì vậy mình sẽ đưa ra thêm một phương pháp xác định nghiệm bội bằng giới hạn để xác định nhanh hơn rất nhiều.

Cơ sở lý thuyết: Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=\alpha$ là nghiệm bội n khi đó ta phân tích được $f(x)=(x-\alpha)^n g(x)$ với $g(\alpha)\neq 0$. Khi đó ta luôn có:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m}=\begin{cases} g(\alpha)\ khi\ m=n \\ (x-\alpha)^{n-m}g(\alpha)=0\ khi\ m<n \\ \dfrac{g(\alpha)}{(x-\alpha)^{m-n}}=\infty\ khi\ m>n \end{cases}.$$

Để tính giới hạn lim trong máy tính cầm tay, ta nhập biểu thức $f(x)$ vào máy tính và sử dụng chức năng CALC với giá trị $X=\alpha\pm 0.00001$, tức là ta tính giá trị của $f(\alpha\pm 0.00001)=\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$.

Lưu ý: Chọn đại lượng gần bằng với nghiệm này chúng ta cần linh hoạt tuỳ chọn tuỳ theo luỹ thừa lớn nhất của phương trình, nếu luỹ thừa càng lớn thì thì nghiệm gần đúng phải càng xa nghiệm chính thức vì nếu quá nhỏ sẽ dẫn tới một số nhân với số vô cùng nhỏ sẽ ra 0 hết. Ví dụ như là phương trình mình có bậc cao nhất là 2 thì sài nghiệm gần đúng $X=\alpha\pm 0.00000001$, nhưng nếu phương trình có bậc cao nhất là 3 thì ta sài nghiệm gần đúng là $X=\alpha\pm 0.0001$, còn phương trình bậc cao nhất là 4 ta có thể sài nghiệm gần đúng là $X=\alpha\pm 0.01$ chẳng hạn.

Ví dụ: Giải phương trình sau: $\left(x^3+12x+3\right)\sqrt{3x+1}+x^3-18x^2-9x-6=0 \quad (*)$

Bước 1: Sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta dễ dàng tìm ra được phương trình có một nghiệm là $x=1$.

Bước 2: Tiến hành kiểm tra tính chất nghiệm bội của $x=1$ bằng cách nhập vào màn hình biểu thức:

$$\frac{\left(x^3+12x+3\right)\sqrt{3x+1}+x^3-18x^2-9x-6}{(x-1)^A}$$

Bấm CALC nhập X = $1-0.0001$, A = 2 được kết quả $-\frac{21}{50000}\approx 0$, suy ra $x=1$ là nghiệm bội lớn hơn 2. Tiếp tục kiểm tra bằng cách bấm lại CALC, giữ nguyên X, nhập A = 3 thì ta được kết quả là $\frac{21}{5}$, suy ra ngay $x=1$ là nghiệm bội ba của phương trình.

Để chắc chắn hơn chúng ta cũng có thể tiếp tục bấm CALC để thử với $A=4$, ta được kết quả $\approx\infty$ và lúc này ta có thể khẳng định chắc chắn đây là nghiệm bội ba của phương trình.

Bước 3: Tiến hành tìm liên hợp của căn và nhóm nhân tử bội ba đã tìm được, ta sẽ được:

$$(*)\Leftrightarrow (x-1)^3\left[2+\sqrt{3x+1}+\frac{x^3}{\left(\sqrt{3x+1}+x+1\right)^2}\right]=0$$

PHẦN 3: BÀI TẬP MẪU VÀ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Nhân liên hợp nghiệm hữu tỉ đơn

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-9}+2x^2+3x=\sqrt{5x-1}+1 \quad (*)$

Phân tích: Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta tìm được một nghiệm của phương trình là $x=1$, kiểm tra ta có đây là nghiệm đơn của phương trình. Thay giá trị nay vào các căn trong phương trình ta có : $\begin{cases}\sqrt[3]{x-9}=-2\\ \sqrt{5x-1}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x-9}+2=0\\ \sqrt{5x-1}-2=0\end{cases}$ là các tách liên hợp cần tìm trong phương trình.

Lời giải: Điều kiện: $x\ge\frac{1}{5}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-9}+2\right)-\left(\sqrt{5x-1}-2\right)+2x^2+3x-5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-9}^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5\right)=0 \quad (**)$$

Ta có: $\frac{1}{\sqrt[3]{x-9}^2-2\sqrt[3]{x-9}+4}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+2x+5=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x-9}-1\right)^2+3}+2x+\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{\sqrt{5x+1}+2}\right)>0$.

Vậy phương trình (**) có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài 2: Giải phương trình: $5x^3-22x^2+22x-6+\sqrt{4x-3}=0 \quad (*)$

Phân tích: Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta tìm được hai nghiệm của phương trình là $x=1$ và $x=3$, kiểm tra ta thấy đây là hai nghiệm đơn của phương trình. Do đó chắc chắn phương trình trên sẽ có nhân tử là $(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$. Vì đây là nhân tử bậc hai nên căn thức của chúng ta liên hợp có dạng : $\sqrt{4x-3}=ax+b$, thay hai nghiệm $x=1$ và $x=3$ vào phương trình, ta được:

$\begin{cases}a+b=1\\ 3a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$, vậy nhân tử của căn là $x-\sqrt{4x-1}$.

Lời giải: Điều kiện: $x \ge \dfrac{3}{4}$. Ta có:

Pt (*) $\Leftrightarrow \left(5x^3-22x^2+23x-6\right)-\left(x-\sqrt{4x-3}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x+3\right)\left(5x-2\right)-\dfrac{x^2-4x+3}{x+\sqrt{4x-3}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+3\right)\left(5x-2-\dfrac{1}{x+\sqrt{4x-3}}\right)=0 \ (**)$

Ta có: $5x-2-\dfrac{1}{x+\sqrt{4x-3}}=\left(5x-\dfrac{10}{3}\right)+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{x+\sqrt{4x-3}}\right)=5\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{4x-3+4\sqrt{4x-3}}{3\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}>0 \ \forall x \ge \dfrac{3}{4}$.

Khi đó pt (**) $\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x \in \{1;3\}$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: $\sqrt{x^2+x-2}+x^2 \ge \sqrt{2(x-1)}+1$. Đáp số: $x \in [1;+\infty)$.

Bài 2: $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17} \ge x-x^2$. Đáp số: $x \in \left[\dfrac{17}{21};1\right] \cup [2;+\infty)$.

Bài 3: $\sqrt{x^4-x^2+4}+\sqrt{x^4+20x^2+4}=7x$. Đáp số: $x \in \{1;2\}$.

Bài 4: $5x^3-3x^2+54x-30+\sqrt{5x-6}=0$. Đáp số: $x \in \{2;3\}$.

Bài 5: $6x^3-19x^2+14x-1+2\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x-1}=0$. Đáp số: $x \in \{1;2\}$.

Bài 6: $3x^2+10x+\sqrt{3x+3}=x^3+26+\sqrt{5-2x}$. Đáp số: $x \in \{2\}$.

Bài 7: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$. Đáp số: $x \in \{1\}$.

Bài 8: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$. Đáp số: $x \in \{3\}$.

Bài 9: $2\sqrt{x+3}+2(x-1)\sqrt{x+7}=4x^2+13x-13$. Đáp số: $x \in \{-3;1\}$.

Bài 10: $\left(x^2+x\right)\sqrt{4x-3}-\sqrt{6x-2}-16x+16=0$. Đáp số: $x \in \{1;3\}$.

2. Nhân liên hợp nghiệm vô tỷ đơn

Bài 1: Giải phương trình sau: $x^2+4x+3=(x+1)\sqrt{8x+5}+\sqrt{6x+2}$ (*)

Phân tích: Đặt $F(x)=x^2+4x+3-(x+1)\sqrt{8x+5}-\sqrt{6x+2}$.

Sử dụng chức năng TABLE với hàm số $F(x)$ trên ta khảo sát được phương trình có nghiệm trong khoảng $(4;4.5)$	Math X | F(X) 3 | 4 | -0.512 4 | 4.5 | 0.6476 5 | 5 | 2.0939 5
Sử dụng chức năng SOLVE của máy tính với giá trị ban đầu $x_0=4.2$, ta tìm được nghiệm là $x \approx 4.236067977$. Kiểm tra ta thấy đây là nghiệm đơn.	Math X²+4X+3=(X+1)√8▸ X= 4.236067977 L−R= 0
Thay giá trị x vừa tìm được vào các căn để tìm biểu thức liên hợp, ta được:	Math √8X+5 6.236067977

$\begin{cases}\sqrt{8x+5}\approx 6.236067977\\ \sqrt{6x+2}\approx 5.236067977\end{cases}$ Do đó ta đánh giá: $\begin{cases}\sqrt{8x+5}=x+2\\ \sqrt{6x+2}=x+1\end{cases}$	Math √6X+2 5.236067977

Lời giải: Điều kiện: $x\geq -\frac{1}{3}$. Ta có:

Pt (*) $\Leftrightarrow (x+1)\left(x+2-\sqrt{8x+5}\right)+\left(x+1-\sqrt{6x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\frac{x^2-4x-1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{6x+2}}=0\Leftrightarrow \left(x^2-4x-1\right)\left(\frac{x+1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{6x+2}}\right)=0$

Vì $x\geq -\frac{1}{3}$ nên $\frac{x+1}{x+2+\sqrt{8x+5}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{6x+2}}>0$.

Vậy $x^2-4x-1=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{5}$.

Bài 2: Giải bất phương trình: $\frac{x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\leq 0$ (*)

Phân tích: Đặt $F(x)=x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3$

Sử dụng chức năng TABLE với hàm $F(x)$ ở trên ta thấy phương trình $F(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;-0.5)$.	Math X F(X) 1 -1 -1 2 -0.5 0.1982 3 0 1 -1
Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, với giá trị ban đầu $x_0=-0.7$, ta tìm được nghiệm của phương trình $x\approx -0.618033988$. Kiểm tra ta thấy đây là nghiệm đơn.	Math X³+X+1+X(√X+1)³ X= -0.618033988 L-R= 0
Thay giá trị x vừa tìm được vào căn thức có trong bất phương trình, ta được : $\sqrt{x+1}\approx 0.6180339887$. Do đó ta đánh giá: $\sqrt{x+1}=-x$ hay nhân tử $\sqrt{x+1}+x$.	Math √X+1 0.6180339887

Lời giải: Điều kiện: $\begin{cases}x\geq -1\\ \sqrt{x^2+x+1}\neq -x\end{cases}\Leftrightarrow x>-1$.

Với $x>-1\Rightarrow x+\sqrt{x^2+x+1}>x+\sqrt{x^2}\Rightarrow x+\sqrt{x^2+x+1}>x+|x|\geq x-x\geq 0$

Do đó: $x+\sqrt{x^2+x+1}>0$ với $\forall x>-1$.

Ta có $(*)\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x+1+x\left(\sqrt{x+1}\right)^3\leq 0\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x+1+\left(x^2+x\right)\sqrt{x+1}\leq 0\\ x>-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2+x)(x+\sqrt{x+1})-[x^2-(x+1)]\le 0\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+\sqrt{x+1})(x^2+\sqrt{x+1})\le 0\\ x>-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}\le -x\\ x>-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x\le 0\\ x^2-x-1\ge 0\end{cases} \Rightarrow x\in\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Bài 3: Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$ (*)

<u>Phân tích</u>: Ta biến đổi sơ qua phương trình (*) và rút gọn bớt ta được như sau:

(*) $\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1-\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)=0$

Dễ thấy $1+\sqrt{1+x}>0$ nên $\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1-\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}=0$.

Đặt $F(x)=\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}$.

Sử dụng chức năng TABLE để khảo sát khoản nghiệm của phương trình, ta thấy phương trình có một nghiệm $x=0$, còn lại chưa thấy khoản nào đổi dấu. Nhưng chúng ta chưa vội kết luận mà sẽ khảo sát với bước nhảy nhỏ hơn, lúc này ta nhậ thấy phương trình có nghiệm trong khoản $(0.3;0.4)$. Chú ý là nhiều bạn sẽ bỏ qua việc này, thế nên sẽ gây thiếu nghiệm khi khảo sát.	Math X | F(X) 1 | | 0 2 | 0.5 | 0.0481 3 | 1 | 0.5857 0 Math X | F(X) 1 | | 0 2 | 0.1 | -9.1E-3 3 | 0.2 | -0.018 0 Math X | F(X) 4 | 0.3 | -0.015 5 | 0.4 | [illegible] 6 | 0.5 | 0.0481 5.234309772×10⁻³
Sử dụng chức năng SOLVE trong máy tính cầm tay tìm nghiệm còn lại với giá trị ban đầu $x_0=0.35$, ta được nghiệm.	Math √(2X²−2X+1) −√(X²+)▸ X= 0.381966011 L−R= 0
Tính giá trị của $\sqrt{x}\approx 0.6180339887$. Ta đánh giá $\sqrt{x}=1-x$	Math √X 0.6180339887
Tính giá trị của $\sqrt{2x^2-2x+1}\approx 0.726542528$ $\sqrt{x^2+x}\approx 0.726542528$ Ta đánh giá $\sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{x^2+x}$	Math √(2X²−2X+1) 0.726542528 Math √(X²+X) 0.726542528

<u>Lời giải</u>: Điều kiện $x\ge 0$. Ta có:

Pt (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0$ (**)

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(\frac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1+\sqrt{x}=0\ (1) \\ x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}=0\ (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Kết hợp (2) và (**), ta có hệ: $\begin{cases} x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}=0 \\ \sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x-1+\sqrt{x}=0 \end{cases}$

Cộng hai vế của phương trình trên, ta được:

$$2\sqrt{2x^2-2x+1}+2x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}=1-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2x+1=(1-x)^2 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 .$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là: $x\in\left\{0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: $2x+\sqrt{4x^2-5x+2}=\sqrt{8x-1}+\sqrt{3x+1}$. Đáp số: $x\in\left\{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Bài 2: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$. Đáp số: $x\in\left\{\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}\right\}$.

Bài 3: $15x^2-x-5=2\sqrt{x^2+x+1}$. Đáp số: $x\in\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6};\frac{-1-\sqrt{29}}{10}\right\}$.

Bài 4: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}$. Đáp số: $x\in\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 5: $\left(6x^2+12x-6\right)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$. Đáp số: $x\in\left\{4\pm2\sqrt{3};9\pm6\sqrt{2};1\right\}$.

Bài 6: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$. Đáp số: $x\in\left\{\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Bài 7: $2x^2+x+1+3x\sqrt{x+1}=0$. Đáp số: $x\in\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right\}$.

Bài 8: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{4-x^2}=2x^2+2x-2$. Đáp số: $x\in\left\{-2;\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$.

Bài 9: $2x^2+5x+\left(x^2+2\right)\sqrt{x+2}=0$. Đáp số: $x\in\left\{-1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};2-2\sqrt{3}\right\}$.

Bài 10: $3x^2+4x+1+4\sqrt{2x^2+3x-2}\ge 4x\sqrt{x+2}+(2x+6)\sqrt{2x-1}$. Đáp số: $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bài 11: $\sqrt{\frac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\frac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}\ge x+1$. Đáp số: $-1\le x\le\frac{3}{5}$.

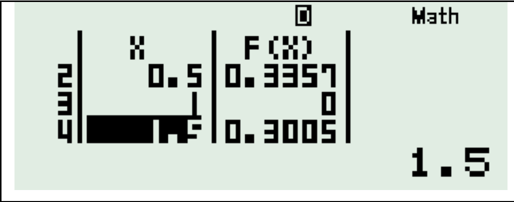
Bài 12: $2\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{2\left(2x^2-2x+1\right)}+2x\left(2x^3-4x^2+3x-1\right)\ge\frac{7}{4}$. Đáp số: $x\in\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Bài 13: $\sqrt{8-x^2}-x^3+3x^2-4x+2\le 0$. Đáp số: $x\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

3. Nhân liên hợp nghiệm kép

Bài 1: Giải phương trình: $x^2-x+2-2\sqrt{x}=0$ (*)

<u>**Phân tích**</u>: Đặt $F\left(x\right)=x^2-x+2-2\sqrt{x}$.

<table>
<tr><td>Sử dụng chức năng TABLE để khảo sát khoảng nghiệm, dùng chức năng SOLVE để tìm nghiệm trong khoảng đó và kiểm tra nghiệm, ta có nghiệm kép $x=1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">TÌM LIÊN HỢP NGHIỆM KÉP
Vì đây là nghiệm kép nên dạng liên hợp của căn sẽ là $\sqrt{x}=ax+b$.
Thay nghiệm $x=1$ vào và kết hợp đạo hàm hai vế, ta được:
$$\begin{cases}\left(ax+b=\sqrt{x}\right)_{x=1}\\ a=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)_{x=1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$
Vậy liên hợp ta cần tạo là: $x+1-2\sqrt{x}$.</td></tr>
</table>

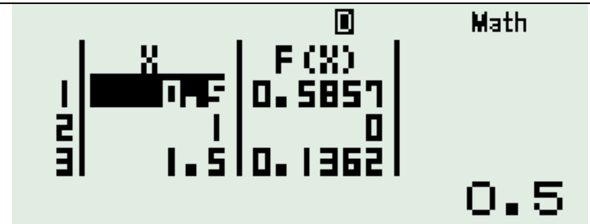
<u>**Lời giải**</u>: Điều kiện: $x\ge 0$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\frac{\left(x+1\right)^2-4x}{x+1+2\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2\left(1+\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow x=1\ \text{(vì } x\ge 0 \text{ nên } 1+\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}>0\text{)}$$

Bài 2: Giải phương trình: $2x+1=2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}$ (*)

<u>**Phân tích**</u>: Đặt $F\left(x\right)=2x+1-2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}$.

<table>
<tr><td>Dùng TABLE để khảo sát khoảng nghiệm của phương trình và chức năng SOLVE để giải tìm nghiệm. Kiểm ra nghiệm tìm được ta nhận được phương trình có nghiệm kép $x=1$ là nghiệm duy nhất.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">TÌM LIÊN HỢP CỦA PHƯƠNG TRÌNH
Vì phương trình có nghiệm kép nên liên hợp của căn thức ta tìm như sau:
Đặt $ax+b=\sqrt{x}$, ta có:
$$\begin{cases}\left(ax+b=\sqrt{x}\right)_{x=1}\\ a=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)_{x=1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$
Liên hợp cần tìm cho $\sqrt{x}$ là $x+1-2\sqrt{x}$.
Đặt $cx+d=\sqrt{2x-1}$, ta có:</td></tr>
</table>

$\begin{cases}\left(cx+d=\sqrt{2x-1}\right)_{x=1}\\ c=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x-1}\right)_{x=1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c+d=1\\ c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\ d=0\end{cases}$ Liên hợp cần tìm cho $\sqrt{2x-1}$ là $x-\sqrt{2x-1}$.

Lời giải: Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow 2x+1-2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0\Leftrightarrow\left(x+1-2\sqrt{x}\right)+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=0$$

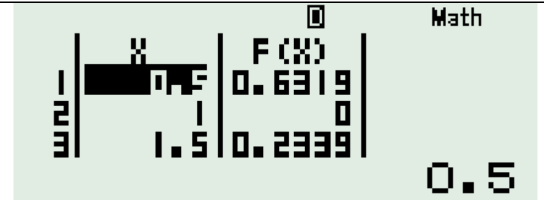
$$\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}=0\Leftrightarrow(x-1)^2\left(\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1\ \text{(do } x\ge\frac{1}{2}\text{ nên }\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}>0\text{)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 3: Giải phương trình: $\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ $(*)$

Phân tích: Xét $F(x)=\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}-4$

Sử dụng TABLE để khảo sát khoảng nghiệm và chức năng SOLVE để tìm nghiệm. Tiến hành kiểm tra ta có phương trình đã có có một nghiệm kép duy nhất là $x=1$.	

TÌM LIÊN HỢP NGHIỆM CỦA CĂN THỨC
Vì phương trình có nghiệm kép nên ta tìm liên hợp cho các căn như sau: Đặt $ax+b=\sqrt{x}$, ta có: $\begin{cases}\left(ax+b=\sqrt{x}\right)_{x=1}\\ a=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)_{x=1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ Vậy liên hợp cần tìm cho $\sqrt{x}$ là $x+1-2\sqrt{x}$.   Đặt $cx+d=\sqrt{x^2-x+1}$, ta có: $\begin{cases}\left(cx+d=\sqrt{x^2-x+1}\right)_{x=1}\\ c=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)_{x=1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c+d=1\\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\dfrac{1}{2}\\ d=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ Vậy liên hợp cần tìm cho $\sqrt{x^2-x+1}$ là $x+1-2\sqrt{x^2-x+1}$

Lời giải: Điều kiện $x>0$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\frac{3x+3}{\sqrt{x}}-6=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}-2\Leftrightarrow 3\left(\frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=\frac{x+1-2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\left(x^2-2x+1\right)}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}=\frac{-3\left(x^2-2x+1\right)}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[\frac{1}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (vì } \frac{1}{\sqrt{x}\left(x+1+2\sqrt{x}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}\left(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}>0$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài tập tự luyện

Bài 1: $x^3-2x^2+4x-1=\sqrt{4x-3}+\sqrt[3]{3x-2}$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

Bài 2: $x^2+1=\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{3x-2}$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

Bài 3: $x^3+2x-\left(x^2+1\right)\sqrt{2x-1}>\sqrt[3]{2x^2-x}$. Đáp số: $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$.

Bài 4: $4\sqrt{x^2-x+10-4\sqrt{2-2x}}=x-7+8\sqrt{3-x}$. Đáp số: $x\in\{-1\}$.

Bài 5: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

Bài 6: $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

Bài 7: $x^2-8x+10+\frac{81}{x+2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}$. Đáp số: $x\in\{5\}$.

Bài 8: $x^4-16x^3+31x^2-6x+2-6(x+1)\sqrt{x}=0$. Đáp số: $x\in\left\{1;7\pm4\sqrt{3}\right\}$.

Bài 9: $2x^2-3x+7-3\sqrt[3]{4x+4}=0$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

Bài 10: $x^4+\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{1-x}$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

4. Nhân liên hợp nghiệm bội bậc ba trở lên

Bài 1: Giải phương trình: $x^5-3x^4+4x^3-3x^2+2x-1=(x-1)\sqrt{2x^2-2x+1}$ (*)

Phân tích: Đặt $F(x)=x^5-3x^4+4x^3-3x^2+2x-1-(x-1)\sqrt{2x^2-2x+1}$

Dùng chức năng **TABLE** để khảo sát khoảng nghiệm và chức năng **SOLVE** để giải tìm nghiệm, ta nhận thấy phương trình chỉ có 2 nghiệm là $x=0$ và $x=1$. Ta tiến hành kiểm tra tính chất nghiệm bội thì thấy $x=0$ là một nghiệm kép và $x=1$ là nghiệm bội ba. Như vậy phương trình sẽ có nhân tử là $x^2(x-1)^3=x^5-3x^4+3x^3-x^2$. Ta sẽ đi nhóm nhân tử này thay vì tìm liên hợp cho căn vì nó sẽ phức tạp hơn.	Math X | F(X) 2 | -0.5 | 0.1194 3 | 0 | 0 4 | | -0.038 0.5 Math X | F(X) 4 | 0.5 | -0.038 5 | 1 | 0 6 | | 0.4743 1.5

Lời giải: Điều kiện $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\left(x^5-3x^4+3x^3-x^2\right)+\left[x^3-2x^2+2x-1-(x-1)\sqrt{2x^2-2x+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^3-3x^2+3x-1\right)+\left(x-1\right)\left(x^2-x+1-\sqrt{2x^2-2x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)^3+\left(x-1\right)\frac{x^2\left(x-1\right)^2}{x^2-x+1+\sqrt{2x^2-2x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2-x+1+\sqrt{2x^2-2x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)^3=0 \text{ (vì } 1+\frac{1}{x^2-x+1+\sqrt{2x^2-2x+1}}>0\text{)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x\in\{0;1\}$.

Bài 2: Giải phương trình: $2x^2+3=\sqrt{x^3+2x^2+1}+\sqrt{x^3+4x^2+4}$ (*)

<u>Phân tích</u>: Đặt $F\left(x\right)=2x^2+3-\sqrt{x^3+2x^2+1}-\sqrt{x^3+4x^2+4}$

Dùng TABLE khảo sát khoảng nghiệm và chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta tìm được hai nghiệm phương trình là $x=1$ và $x=0$. Ta tiến hành kiểm tra tính chất nghiệm bội của hai nghiệm, ta nhận thấy rằng $x=1$ là nghiệm đơn, $x=0$ là nghiệm bội ba. Vậy phương trình chắc chắn sẽ có nhân tử là $x^3\left(x-1\right)=x^4-x^3$. Vì bậc phương trình nhỏ hơn 4 nên ta sẽ đi tìm liên hợp của hai căn mà không tách như ví dụ ở bài 1 như trên.	Math X F(X) 2 -0.5 0.1194 3 0 0 4 -0.038 0.5 Math X F(X) 4 0.5 -0.038 5 1 0 6 0.4743 1.5

Trong phương trình xuất hiện nghiệm bội ba nên liên hợp của hai căn sẽ lần lượt có dạng:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=\sqrt{x^3+2x^2+1} \\ dx^2+ex+f=\sqrt{x^3+4x^2+4} \end{cases}.$$

- Với $ax^2+bx+c=\sqrt{x^3+2x^2+1}$, ta có:
  Thay nghiệm $x=0$ vào, ta được $c=1$.
  Lấy đạo hàm cấp 2 hai vế tại $x=0$, ta được $a=1$.
  Thay nghiệm $x=1$ vào, ta được $a+b+c=2$, suy ra $b=0$.
  Vậy $x^2+1=\sqrt{x^3+2x^2+1}$.
- Với $dx^2+ex+f=\sqrt{x^3+4x^2+4}$, ta có:
  Thay nghiệm $x=0$ vào, ta được $f=2$.
  Lấy đạo hàm cấp 2 hai vế tại $x=0$, ta được $d=1$.
  Thay nghiệm $x=1$ vào, ta được $d+e+f=3$, suy ra $b=0$.
  Vậy $x^2+2=\sqrt{x^3+4x^2+4}$.

<u>Lời giải</u>: Điều kiện $\begin{cases} x^3+2x^2+1\geq 0 \\ x^3+4x^2+4\geq 0 \end{cases}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow x^2+1-\sqrt{x^3+2x^2+1}+x^2+2-\sqrt{x^3+4x^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3\left(x-1\right)}{x^2+1+\sqrt{x^3+2x^2+1}}+\frac{x^3\left(x-1\right)}{x^2+2+\sqrt{x^3+4x^2+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-1)\left(\frac{1}{x^2+1+\sqrt{x^3+2x^2+1}}+\frac{1}{x^2+2+\sqrt{x^3+4x^2+4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-1)=0 \text{ (vì } \frac{1}{x^2+1+\sqrt{x^3+2x^2+1}}+\frac{1}{x^2+2+\sqrt{x^3+4x^2+4}}>0 \text{)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x\in\{0;1\}$.

Bài tập tự luyện.

Bài 1. $2(2x^2+3x+1)\sqrt{x^2+3x-1}=9(x-1)\sqrt{x^2+x+1}+(4x^2+3x+5)\sqrt{x^2+2}$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

Bài 2: $x^4+2x^3+2x^2+x+2=2\sqrt{x^2+x+1}$. Đáp số: $x\in\{-1;0\}$.

Bài 3: $x^2\sqrt{x+3}+2=2\sqrt{5x^2+1-2x^3}$. Đáp số: $x\in\{0;1\}$.

Bài 4: $x^3+x^2+x+1=\sqrt{3x^2+2x+1}$. Đáp số: $x\in\{0\}$.

Bài 5: $x^3-2x^2-x+1=\sqrt{2x^3-2x+1}$. Đáp số: $x\in\{0\}$.

Bài 6: $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6x^2+2}-x-\frac{4}{3}=0$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

Bài 7: $2(x+5)\sqrt{3-x}+16\sqrt{x+2}+3x^2-11x-36=0$. Đáp số: $x\in\{2\}$.

Bài 8: $x^3+x^2+1=\sqrt{2x^2+1-2x^3}$. Đáp số: $x\in\{0\}$

Bài 9: $2x+3=\sqrt[3]{3x^2+3x+1}+\sqrt[3]{6x^2+12x+8}$. Đáp số: $x\in\{0\}$.

Bài 10: $(x+3)\sqrt{x}=2x+1+\sqrt[3]{3x^2-3x+1}$. Đáp số: $x\in\{1\}$.

PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG TÍCH

Cơ sở lý thuyết:

Cho phương trình có dạng $g(x)=h(x)\sqrt[n]{f(x)}$ với $f(x),g(x),h(x)$ là các đa thức. Nếu phương trình có nghiệm $x=x_0$ là nghiệm của biểu thức $\sqrt[n]{f(x)}=A(x)$ thì luôn tồn tại một phân tích có dạng:

$g(x)-h(x)\sqrt[n]{f(x)}=\left[A(x)-\sqrt[n]{f(x)}\right].B(x)$

Trong các bài toán ra xét thì:

- Bậc của căn thức là bậc 2 hoặc bậc 3
- Đa thức $f(x),h(x)$ và $g(x)$ có bậc bé hơn hoặc bằng 4.
- Đa thức $A(x)$ thường sẽ là một biểu thức bậc 1: $A(x)=ax+b$.

Phương pháp sử dụng:

Bước 1: Sử dụng máy tính cầm tay để tìm biểu thức $A(x)$:

Sử dụng chức năng **SOLVE** của máy tính cầm tay để tìm nghiệm $g(x)=h(x)\sqrt[n]{f(x)}$, sau đó lưu nghiệm tìm được vào một biến bất kỳ trên máy, chẳng hạn ở đây mình sẽ lưu vào biến A. Sử dụng chức năng TABLE của máy tính cầm tay để khảo sát hàm số sau: $\sqrt[n]{f(A)}-AX$ với giá trị khởi đầu **START** là -10, giá trị kết thúc **END** là 10, và bước nhảy lặp nghiệm **STEP** là 1. Ta sẽ được một bảng giá trị với một bên là giá trị của X, còn một bên là giá trị của $f(X)$. Tại đây ta sẽ lấy giá trị mà tại đó X và $f(X)$ là hai số hữu tỉ (ưu tiên chọn số nguyên nhỏ)

Bước 2: Cân bằng tích:

Ta sẽ cân bằng hai vế với các biểu thức $\sqrt[n]{f(x)}$, $A(x)$ và $\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]^n=f(x)$, $A^n(x)$ để đưa phương trình về dạng:

$$k(x)A^n(x)+h(x)A(x)=k(x)f(x)+h(x)\sqrt[n]{f(x)}$$

Trong đó $g(x)=k(x)\left[A^n(x)-f(x)\right]-h(x)A(x)$

Tuỳ vào biểu thức $g(x)$ mà ta sẽ lựa chọn $k(x)$ phù hợp để cân bằng. Thông thường thì $k(x)$ sẽ là hệ số a, biểu thức bậc nhất $ax+b$, biểu thức bậc 2 ax^2+bx+c hay phân thức $\frac{m}{ax+b}$ …

Chú ý:

- Biểu thức $A(x)$ thông thường là bậc nhất nhưng cũng có thể là biểu thức bậc cao và ta phán đoán $A(x)$ dựa vào từng bài toán. Ki bài toán có nhiều nghiệm lẻ thì ta có thể sử dụng 1 nghiệm bất kỳ trong đó để cân bằng, thông thường mỗi nghiệm lẻ sẽ cho ta một biểu thức cân bằng khác nhau. Dù biểu thức cân bằng khác nhau nhưng kết quả cuối cùng đều đúng.

- Với các bài toán sau khi khảo sát bằng **TABLE** ta thấy có rất nhiều cặp nghiệm nguyên thì việc lựa chọn biểu thức cân bằng phụ thuộc vào hệ số của luỹ thừa lớn nhất có trong bài toán, ta chọn hệ số của x là ước của hệ số luỹ thừa lớn nhất. Nếu chọn hệ số không đúng thì ta không cần bằng được mặc dù biểu thức của ta vẫn chứa nghiệm nhưng sẽ dẫn tới nghiệm được giải không triệt để và rất khó khai triển cho biểu thức còn lại. Điều này các em có thể dễ dàng kiểm nghiệm với một phương trình có nghiệm nguyên và nhiều cặp $\left[x;f(x)\right]$ là số nguyên.

Bài tập áp dụng:

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{x+2}=2-x^2 \quad (*)$

Phân tích:

Sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta tìm được một nghiệm của phương trình là $x\approx 0.6180339887$ và ta gán ngay nghiệm tìm được này cho biến A.

Sử dụng chức năng TABLE của máy tính để khảo sát hàm số $F(X)=\sqrt{A+2}-AX$ với giá trị START = -10, END = 10 và STEP = 1. Xem xét bảng giá trị nhận được thì ta có cặp giá trị nguyên $X=1$ và $F(X)=1$. Khi đó ta suy ra $A(x)=x+1$ hay $\sqrt{x+2}=x+1$.

Ta viết lại phương trình và đi cân bằng như sau: $(*)\Leftrightarrow 2-x^2=\sqrt{x+2}$

Đầu tiên ta đi cân bằng cho $\sqrt{x+2}$ và $x+1$: $...(x+1)=...\sqrt{x+2}$

Khi đó vế trái còn thừa lại $(2-x^2)-(x+1)=1-x-x^2$. Do đó biểu thức cân bằng có bậc 2 và bậc của biểu thức còn thừa cũng là 2 nên ta sẽ cân bằng như sau:

$a(x+1)^2+(x+1)=a(x+2)+\sqrt{x+2} \; (**)$

Khi đó để (**) tương đương với phương trình (*) thì $a(x+1)^2-a(x+2)=1-x-x^2$, đồng nhất hai vế ta được $a=-1$.

Lời giải: Điều kiện: $x\geq -2$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow -(x+1)^2+(x+1)=-(x+2)+\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+2)-(x+1)^2\right]-\left[\sqrt{x+2}-(x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-x-1\right)\left(\sqrt{x+2}+x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=x+1\\ \sqrt{x+2}=-x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq -1\\ x^2+x-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 0\\ x^2-x-2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x=-1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x\in\left\{-1;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $2x^2+x-2=(x-1)\sqrt{x+2} \quad (*)$

Phân tích: Làm tương tự ở trên ta tìm được biểu thức cân bằng $A(x)=x+1$ hay $\sqrt{x+2}=x+1$.

Ta tiến hành cân bằng cho $\sqrt{x+2}$ và $x+1$ như sau: $...(x-1)(x+1)=...(x-1)\sqrt{x+2}$

Do $\sqrt{x+2}$ nhân với $(x-1)$ nên vế trái ta cũng nhân với $(x-1)$.

Lúc này biểu thức thừa còn lại trong vế trái là $(2x^2+x-2)-(x-1)(x+1)=x^2+x-1$.

Ta tiếp tục cận bằng cho $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x+2$ và $(x+1)^2$. (chính là cân bằng $\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]^n$ và $A^n(x)$.)

Do bậc của biểu thức cân bằng và biểu thức càng thừa đều là bậc 2 nên ta cân bằng:

$a(x+1)^2+(x-1)(x+1)=a(x+2)+(x-1)\sqrt{x+2}$

Khi đó ta suy ra ngay $a(x+1)^2-a(x+2)=x^2+x-1$. Đồng nhất hệ số ta được $a=1$.

Lời giải: Điều kiện $x\geq -2$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow (x+1)^2+(x-1)(x+1)=(x+2)+(x-1)\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2-(x+2)\right]+(x-1)\left[(x+1)-\sqrt{x+2}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{x+2}\right)\left(2x+\sqrt{x+2}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=x+1\\ \sqrt{x+2}=-2x\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1\\ x+2=(x+1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le \\ x+2=(-2x)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x\in\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}\right\}$.

<u>Ví dụ 3</u>: Giải phương trình: $x^3-3x^2-3x+2\sqrt{(x+1)^3}=0\quad(*)$

<u>Phân tích</u>: Ta sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay để tìm nghiệm và chức năng TABLE để tìm biểu thức cân bằng nhưng sau khi xem xét bảng giá trị $X, f(X)$ thì nhận thấy không có cặp giá trị nào hữu tỉ cả. Thực chất khi đi làm như các ví dụ trước là ta đã mặc định hệ số ứng với căn là 1 nhưng thực tế biểu thức cân bằng của căn thức phải có dạng $k\sqrt{f(x)}=ax+b$.
Cụ thể ở bài toán này, với giá trị $k=1$ ta không tìm thấy biểu thức cân bằng nào cho $\sqrt{x+1}=ax+b$, ta tiếp tục thử với $k=2$, tức là biểu thức ta cần khảo sát trong TABLE sẽ là $f(X)=2\sqrt{A+1}-AX$ với A là nghiệm của phương tìm được bằng SOLVE. Lúc này ta đã thu được biểu thức cân bằng là $2\sqrt{x+1}=-x$.
Ta tiến hành cân bằng tích như sau: $(*)\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x=-2(x+1)\sqrt{x+1}$.
Ta cân bằng cho $-x$ và $2\sqrt{x+1}$: $...-(x+1)(-x)=...-(x+1)2\sqrt{x+1}$
Biểu thức còn thừa lại của vế trái là: $(x^3-3x^2-3x)-(x+1)x=x^3-4x^2-4x$.

Ta cân bằng tiếp cho $(-x)^2$ và $\left(2\sqrt{x+1}\right)^2=4(x+1)$. Nhưng do biểu thức còn thừa bậc 3 mà các lượng cân bằng chỉ là bậc 2 nên ta tiến hàng cân bằng với biểu thức bậc nhất $ax+b$:
$(ax+b)x^2-(x+1)(-x)=(ax+b)4(x+1)-(x+1)2\sqrt{x+1}$

Chuyển vế và đồng nhất hệ số: $(ax+b)x^2-(ax+b)4(x+1)=x^3-4x^2-4x\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$

<u>Lời giải</u>: Điều kiện: $x\ge -1$, ta có:
$$(*)\Leftrightarrow x.x^2-(x+1)(-x)=x.4(x+1)-(x+1)2\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x\left[x^2-4(x+1)\right]+(x+1)\left(x+2\sqrt{x+1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x-2\sqrt{x+1}\right)\left(x+2\sqrt{x+1}\right)+(x+1)\left(x+2\sqrt{x+1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+x+1-2x\sqrt{x+1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2\sqrt{x+1}=0\\ x-\sqrt{x+1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sqrt{x+1}=-x\\ \sqrt{x+1}=x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ 4(x+1)=x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x+1=x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ x^2-4x-4=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2-2\sqrt{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho nghiệm là $x\in\left\{2-2\sqrt{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ (*)

Phân tích: Sử dụng máy tính cầm tay ta được một nghiệm là $x=1$ và $x=0.6180339887$, ta lưu nghiệm lẻ này vào biến A, tiến hành khảo sát bằng TABLE và tìm được biểu thức cân bằng là $\sqrt[3]{2x-1}=x$. Ta bắt đầu đi cân bằng cho $\sqrt[3]{2x-1}$ và x như sau: $...2x=...2\sqrt[3]{2x-1}$

Khi đó vế trái còn thừa lại: $(x^3+1)-2x=x^3-2x+1$. Do biểu thức còn thừa lại cùng bậc với biểu thức cần cân bằng thứ hai là x^3 và $\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3$ nên ta cân bằng với hệ số bậc 0 là a.

Ta tiếp tục đi cân bằng cho $\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3=2x-1$ và x^3: $ax^3+2x=a(2x-1)+2\sqrt[3]{2x-1}$

Chuyển vế và đồng nhất hệ số: $ax^3-a(2x-1)=x^3-2x+1\Rightarrow a=1$.

Lời giải: Điều kiện $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$(*)\Leftrightarrow x^3+2x=(2x-1)+2\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow\left[x^3-(2x-1)\right]+\left(2x-2\sqrt[3]{2x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt[3]{2x-1}\right)\left[x^2+x\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{(2x-1)^2}+2\right]=0$

$\Leftrightarrow x-\sqrt[3]{2x-1}=0\ \left(x^2+x\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{(2x-1)^2}+2>0\ \forall x\right)$

$\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình $x^3-2x^2+5x=2\sqrt[3]{5x^2+3}$ (*)

Phân tích: Sử dụng chức năng SOVLE của máy tính cầm tay ta tìm ngay một nghiệm của phương trình là $x=1$. Vì đây là một nghiệm nguyên nên trong quá trình khảo sát nghiệm này bằng TABLE, ta nhận thấy có xuất hiện rất nhiều cặp nghiệm nguyên $(x, f(x))$, vậy vấn đề đặt ra là ta nên chọn biểu thức nào là phù hợp nhất. Do biểu thức cần tìm có dạng $\sqrt[3]{5x^2+3}=ax+b$. Việc lựa chọn a tuỳ thuộc vào hệ số của luỹ thừa lớn nhất là x^3, a chính là một ước của hệ số này, với bài này thì hệ số của x^3 là 1 và a sẽ là ước của 1, ta chọn $a=1$. Như vậy ta chọn biểu thức cân bằng là $\sqrt[3]{5x^2+3}=x+1$. Ta tiền hành cân bằng tích cho $x+1$ và $\sqrt[3]{5x^2+3}$ như sau:

$...2(x+1)=...2\sqrt[3]{5x^2+3}$

Khi đó vế trái còn thừa lại: $x^3-2x^2+5x-2(x+1)=x^3-2x^2+3x-2$

Ta cân bằng tiếp cho $\left(\sqrt[3]{5x^2+3}\right)^3=5x^2+3x$ và $(x+1)^3$:

$$a(x+1)^3+2(x+1)=a\left(5x^2+3\right)+2\sqrt[3]{5x^2+3}$$

Chuyển vế và đồng nhất hệ số: $a(x+1)^3 - a(5x^2+3) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow a = 1$

Lời giải: Điều kiện $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$(*) \Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) = (5x^2+3) + 2\sqrt[3]{5x^2+3} \Leftrightarrow (x+1)^3 - (5x^2+3) + 2\left(x+1-\sqrt[3]{5x^2+3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt[3]{5x^2+3}\right)\left[(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{5x^2+3} + \sqrt[3]{(5x^2+3)^2} + 2\right] = 0$

$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{5x^2+3} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \in \{1\}$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $4x^2 + 6x + 6 = (x^2 + 7x)\sqrt{x + \dfrac{3}{x}}$ (*)

Phân tích: Do biểu thức dưới căn có dạng phân thức nên ta nhân thêm x ở ngoài vào để đưa về dạng đa thức , tức phương trình $\Leftrightarrow 4x^2 + 6x + 6 = (x+7)\sqrt{x^3+3x}$ với lưu ý là $x > 0$.

Sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta tìm được hai nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 3$. Do biểu thức cân bằng của chúng ta có dạng: $\sqrt{x^3+3x} = ax + b$, thay lần lượt hai nghiệm vào ta được hệ: $\begin{cases}\sqrt{1^3+3.1} = a.1+b \\ \sqrt{3^3+3.3} = a.3+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=2 \\ 3a+b=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2 \\ b=0\end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^3+3x} = 2x$.

Ta cân bằng tích cho $2x$ và $\sqrt{x^3+3x}$ như sau: $...(x+7)2x = ...(x+7)\sqrt{x^3+3x}$

Khi đó vế trái còn thừa lại là $4x^2 + 6x + 6 - (x+7)2x = 2x^2 - 8x + 6$

Ta cân bằng tiếp cho $(2x^2) = 4x^2$ và $\left(\sqrt{x^3+3x}\right)^2 = x^3 + 3x$. Do phần còn thừa lại của vế trái là bậc 2 mà biểu thức cần cân bằng lại bậc 3 nên ta sẽ cân bằng với phân thức $\dfrac{a}{x}$ (do hai lượng cân bằng có nhân tử là x) : $\dfrac{a}{x}4x^2 + (x+7)2x = \dfrac{a}{x}(x^3+3x) + (x+7)\sqrt{x^3+3x}$

Chuyển vế và đồng nhất hệ số: $\dfrac{a}{x}4x^2 - \dfrac{a}{x}(x^3+3x) = 2x^2 - 8x + 6 \Leftrightarrow a = -2$

Lời giải: Điều kiện: $x \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow -\dfrac{2}{x}4x^2 + (x+7).2x = -\dfrac{2}{x}(x^3+3x) + (x+7)\sqrt{x^3+3x}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2}{x}\left[4x^2 - (x^3+3x)\right] + (x+7)\left(2x - \sqrt{x^3+3x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \sqrt{x^3+3x}\right)\left(x + 3 - \dfrac{2}{x}\sqrt{x^3+3x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^3+3x} = 2x \\ 2\sqrt{x^3+3x} = x^2 + 3x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 0 \\ x^3 - 4x^2 + 3x = 0\end{cases} \\ \begin{cases}x \le -3 \vee x \ge 0 \\ x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 \\ x = 3\end{array}\right.$ (do điều kiện $x > 0$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x \in \{1; 3\}$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $(x+1)(x-1)^3 + (2x-1)\sqrt{3x+1} = 7x - x^2$ (*)

Phân tích: Sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta tìm được hai nghiệm của phương trình là $x = 0$ và $x = 1$. Ta tìm được biểu thức cân bằng là $\sqrt{3x+1} = 7x - x^2$.

$(*) \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 1 = -(2x+1)\sqrt{3x+1}$

Khi đó ta cân bằng cho $7x-x^2$ và $\sqrt{3x+1}$: $...-(2x+1)(x+1)=...-(2x+1)\sqrt{3x+1}$

Khi đó vế trái còn thừa lại: $(x^4-2x^3+x^2-5x-1)+(2x+1)(x+1)=x^4-2x^3+3x^2-2x$

Ta cân bằng tiếp cho $(x+1)^2$ và $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=3x+1$. Do biểu thức còn thừa ở vế trái là bậc 4 mà lượng cân bằng lại chỉ bậc 2 nên ta cân bằng với biểu thức ax^2+bx+x như sau:

$(ax^2+bx+c)(x+1)^2-(2x+1)(x+1)=(ax^2+bx+c)(3x+1)-(2x+1)\sqrt{3x+1}$

Chuyển vế và đồng nhất: $(ax^2+bx+c)(x+1)^2-(ax^2+bx+c)(3x+1)-x^4-2x^3+3x^2-2x$

Ta tìm được $a=1,\ b=-1,\ c=2$ hay biểu thức cân bằng là x^2-x+2.

Lời giải: Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{3}$.

$(*)\Leftrightarrow(x^2-x+2)(x+1)^2-(2x+1)(x+1)=(x^2-x+2)(3x+1)-(2x+1)\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow(x^2-x+2)\left[(x+1)^2-(3x+1)\right]-(2x+1)\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)\left[x^3-x+1+(x^2-x+2)\sqrt{3x+1}\right]=0$

$\Leftrightarrow x+1-\sqrt{3x+1}=0\ \left(x^3-x+1+(x^2-x+2)\sqrt{3x+1}>0\ \forall x\ge-\dfrac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\x^2-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\x=0\vee x=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\in\{0;1\}$.

Ví dụ 8: Giải phương trình $(x+1)(x-1)^3=x^2+2x+\sqrt{2x^3+1}$ (*)

Phân tích: Dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta giải được một nghiệm của phương trình là $x\approx2.7320$. Sử dụng chức năng TABLE của máy tính ta tìm được đại lượng cân bằng là $\sqrt{2x^3+1}=2x+1$. Khi đó phần thừa của vế trái là $(x+1)(x-1)^3-x^2-4x-1=x^4-2x^3-x^2-2x-2$.

Ta tiếp tục cân bằng cho $\left(\sqrt{2x^3+1}\right)^2=2x^3+1$ và $(2x+1)^2$. Do đại lượng cân bằng là bậc 3 mà phần còn dư của vế trái lại bậc 4 nên ta cân bằng với một lượng $ax+b$ như sau:

$(ax+b)(2x+1)^2+(2x+1)=(ax+b)(2x^3+1)+\sqrt{2x^3+1}$

Chuyển vế và đồng nhất: $(ax+b)(2x+1)^2-(ax+b)(2x^3+1)=x^4-2x^3-x^2-2x-2$

Sau khi đồng nhất ta không tìm được giá trị a,b thoả mãn. Khi điều này xảy ra có thể hiểu rằng biểu thức ta tìm được chưa đúng.

Ta sẽ thay đổi suy nghĩ một chút: Ta biết rằng phương trình sẽ luôn có nhân tử dạng $\sqrt{2x^3+1}=A(x)$ nhưng không phải biểu thức bậc 1: $A(x)=ax+b$, do bậc của phương trình là 4 nên ta nghĩ ngay đến $A(x)=ax^2+bx+c$ nghĩa là biểu thức cân bằng bậc 2.

Để ý thấy bậc của luỹ thừa lớn nhất là 1 (x^4) nên ta sẽ chọn $a=1$, biểu thức cân bằng có dạng: $\sqrt{2x^3+1}=x^2+bx+c$. Ta sẽ khảo sát bằng TABLE với hàm $f(X)=\sqrt{2A^3+1}-A^2-AX$ với A là nghiệm của phương trình tìm được ở trên, ta tìm được một giá trị $X=1, \mathrm{f}(X)=-1$. Ta suy ra biểu thức cân bằng cần tìm sẽ là $\sqrt{2x^3+1}=x^2-1$.

Lời giải: Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, ta có:

$(*) \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 - 1 = \sqrt{2x^3+1} \Leftrightarrow \left[x^4 - \left(2x^3+1\right)\right] - \left(x^2 + \sqrt{2x^3+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + \sqrt{2x^3+1}\right)\left(x^2 - 1 - \sqrt{2x^3+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 - \sqrt{2x^3+1} = 0 \quad \left(x^2 + \sqrt{2x^3+1} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3+1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x \in \left\{1+\sqrt{3}\right\}$.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $2(x-1)\sqrt{2x+1} + 1 = \sqrt{5-6x}$ $(*)$

Phân tích: Bài toán chứa 2 căn không phải là dạng để ta cân bằng tích nhưng các biểu thức dưới căn cũng như ngoài căn đều là bậc 1, khá đơn giản và khi bình phương thì các biểu thức thu được tối đa là bậc 3. Nên ta sẽ bình phương hai về để đưa về dạng cân bằng tích như sau:

$(*) \Rightarrow \left[2(x-1)\sqrt{2x+1}+1\right]^2 = 5 - 6x \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 + 2(x-1)\sqrt{2x+1} = 0$

Sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay để giải phương trình trên ta tìm được 1 nghiệm là $x \approx 0.809016994$. Dùng TABLE khảo sát ta tìm được biểu thức cân bằng là $\sqrt{2x+1} = 2x$.

Lời giải: Điều kiện: $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{6}$, ta có:

$(*) \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 + 2(x-1)\sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \sqrt{2x+1}\right)\left(4x^2 - 4x + 4 + 2x\sqrt{2x+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - \sqrt{2x+1} = 0 \quad \left(do\ 4x^2 - 4x + 4 + 2x\sqrt{2x+1} = 3(x-1)^2 + \left(x + \sqrt{2x+1}\right)^2 > 0\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

Ví dụ 10: Giải bất phương trình $x^3 + x^2 \ge (x+2)\left(\sqrt{2x+3} - 1\right)$ $(*)$

Phân tích: Xem bất phương trình cũng như phương trình, ta cũng dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay giải ra được nghiệm là $x = -1$ và $x \approx 1.4142$. Lưu nghiệm lẻ vào biến A và dùng TABLE khảo sát ta tìm được biểu thức cân bằng là $\sqrt{2x+3} = x+1$.

Lời giải: Điều kiện: $x \ge -\frac{3}{2}$, ta có:

$(*) \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 2 \ge (x+2)\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{2x+3}\right)\left(x^2 + 2x + 2 + x\sqrt{2x+3}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{2x+3}\right)\left[(x+1)^2 + \left(x+\sqrt{2x+3}\right)^2\right] \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1-\sqrt{2x+3} \ge 0 \\ (x+1)^2 + \left(x+\sqrt{2x+3}\right)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \sqrt{2} \\ x = -1 \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[\sqrt{2}; +\infty\right) \cup \{-1\}$.

Ví dụ 11: Giải bất phương trình $3\left(x^2-1\right)\sqrt{2x+1} < 2\left(x^3 - x^2\right)$ $(*)$

Phân tích: Dễ thấy bất phương trình trên có nhân tử chung là $x = 1$, ta có thể tách được thành:

$(*) \Leftrightarrow (x-1)\left[2x^2 - 3(x+1)\sqrt{2x+1}\right] > 0$

Dùng kỹ thuật cân bằng tích ta tính được $2x^2-3(x+1)\sqrt{2x+1}=\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)\left(2x+2+\sqrt{2x+1}\right)$

Do điều kiện $x\ge -\frac{1}{2}$ nên $2x+2+\sqrt{2x+1}>0$, khi đó bất phương trình của chúng ta tương đương với $(x-1)\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)>0$. Bài toán đã trở nên đơn giản hơn nhiều.

<u>Lời giải</u>: Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$. Ta có:

$(*)\Leftrightarrow (x-1)\left[2x^2-3(x+1)\sqrt{2x+1}\right]>0\Leftrightarrow (x-1)\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)\left(2x+2+\sqrt{2x+1}\right)>0$

Do $2x+2+\sqrt{2x+1}>0$ với $\forall x\ge -\frac{1}{2}$ nên bất phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1>0\\ x+1-2\sqrt{2x+1}>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1<0\\ x+1-2\sqrt{2x+1}<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3+2\sqrt{3}\\ 3-2\sqrt{3}<x<1\end{array}\right..$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x\in\left(3-2\sqrt{3};1\right)\cup\left(3+2\sqrt{3};+\infty\right)$.

<u>Ví dụ 12</u>: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\ge\sqrt{3\left(x^2-2x-2\right)}$ (*)

<u>Phân tích</u>: Ta sẽ bình phương hai vế cho bất phương trình đưa về 1 căn thức duy nhất và áp dụng cân bằng tích. $(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\right)^2\ge 3\left(x^2-2x-2\right)\Leftrightarrow x^2-4x-2\le\sqrt{x^3-x^2-2x}$

Dùng máy tính cầm tay tìm được biểu thức cân bằng $\sqrt{x^3-x^2-2x}=2x+2$. $\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x}=2\sqrt{x+1}$

Ta cân bằng tích cho $(2x+2)$ và $\sqrt{x^3-x^2-2x}$: $...2x+2\le ...\sqrt{x^3-x^2-2x}$

Biểu thức còn dư ở vế trái là: $\left(x^2-4x-2\right)-(2x+2)=x^2-6x-4$.

Ta tiếp tục cân bằng cho $\left(2\sqrt{x+1}\right)^2$ và $\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2$. Vì biểu thức còn dư là bậc 2 trùng với bậc với đại lượng cân bằng nên ta cân bằng bất phương trình với hệ số a như sau:

$a\left(2\sqrt{x+1}\right)^2+2x+2\le a\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2+\sqrt{x^3-x^2-2x}$

Chuyển vế và đồng nhất hệ số: $a\left(2\sqrt{x+1}\right)^2-a\left(\sqrt{x^2-2x}\right)=x^2-6x-4\Leftrightarrow a=-1$

<u>Lời giải</u>: Điều kiện: $x\ge 1+\sqrt{3}$. Ta có:

$(*)\Leftrightarrow -\left(2\sqrt{x+1}\right)^2+2x+2\le -\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2+\sqrt{x^3-x^2-2x}$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)-\sqrt{x+1}\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)\ge 0\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2x}\ge 0$

$\Leftrightarrow x^2-6x-4\le 0\Leftrightarrow 1+\sqrt{3}\le x\le 3+\sqrt{13}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x\left[1+\sqrt{3};3+\sqrt{13}\right]$.

Bài tập tự luyện:

- **Bài 1**: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$
- **Bài 2**: $4x^2-13x+5+\sqrt{3x+1}=0$
- **Bài 3**: $5x^2+15x+2=3\sqrt{4x^2+2}$
- **Bài 4**: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$
- **Bài 5**: $4x^2+\sqrt{2x+3}=8x+1$
- **Bài 6**: $3x^2+3x+2=(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}$
- **Bài 7**: $(2x+2)\sqrt{x^2+x+2}=x^2+5x+2$
- **Bài 8**: $2x^2-6x+10-5(x-2)\sqrt{x+1}=0$
- **Bài 9**: $\sqrt{x^2+2x+2}=\dfrac{3x^2+3x+2}{3x+1}$
- **Bài 10**: $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$
- **Bài 11**: $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$
- **Bài 12**: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$
- **Bài 13**: $x^3-15x^2+78x-141=5\sqrt[3]{2x-9}$
- **Bài 14**: $x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$
- **Bài 15**: $-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^2}$
- **Bài 16**: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x\sqrt{x+\dfrac{6}{x}+5}$
- **Bài 17**: $2x^3+3x^2+2x+1=(2x^2+3x)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}$
- **Bài 18**: $(x-1)(3x^2+1)=(x+1)\sqrt{x^2+x+1}$
- **Bài 19**: $x^3-2x-6=(x^2-2x-6)\sqrt{x^2+1}$
- **Bài 20**: $(5x-4)\sqrt{2x-3}=(4x-5)\sqrt{3x-2}+2$
- **Bài 21**: $2\sqrt{x^3-3x^2+5x-6}=x^2-4x+9$
- **Bài 22**: $2(x^2-x+6)=5\sqrt{x^3+8}$
- **Bài 23**: $\sqrt{5x^2+15x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$
- **Bài 24**: $\sqrt{x^2+x+6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$
- **Bài 25**: $4x^3+2x-1+(2x^2+2x+1)\sqrt[3]{6x^2+1}=0$
- **Bài 26**: $2x^2+2x-1\geq(x+3)\sqrt{x+1}$
- **Bài 27**: $\sqrt{x}\geq\dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-2x^2+2x}$
- **Bài 28**: $2(x^2+2)\geq5\sqrt{x^3+1}$
- **Bài 29**: $\dfrac{x^2+5x}{4}<1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}$
- **Bài 30**: $x-1+\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2}\geq\dfrac{x^3-x^2}{(x+1)^3}$

PHƯƠNG PHÁP TẠO TÍCH NHÂN TỬ

Cơ sở lý thuyết:

Đưa một phương trình vô tỉ về dạng tích của các phương trình vô tỷ cơ bản. Phương pháp chủ yếu dựa vào việc nhóm nhân tử thông qua phương pháp liên hợp hay có nói cách khác đây là cách đi ngược để tìm liên hợp. Ưu điểm của phương pháp này là nó sẽ hạn chế việc các bạn đánh giá biểu thức sau khi liên hợp. Chú ý: Phương pháp thực sự rất hiệu quả với phương trình - bất phương trình vô tỷ dạng 1 căn thức nên muốn sử dụng phương pháp này cần chuẩn hoá phương trình - bất phương trình đưa về một căn thức hết là được.

Phương pháp áp dụng:

Bước 1: Sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay tìm nghiệm của phương trình vô tỷ và lưu nghiệm vô một biến nhớ bất kỳ của máy tính từ A đến M. Ở đây mình sẽ lưu ở biến A chẳng hạn. Còn các bạn thích lưu biến gì thì sử dụng biến đó nhé, không bắt buộc.

Ví dụ tìm nghiệm phương trình: $\sqrt{x+2}=2x^2+x-8$

D Math ▲
$\sqrt{X+2}-(2X^2+X-8)$

D Math ▲
Solve for X
0

D Math ▲
$\sqrt{X+2}-(2X^2+X-8)$
X= 2
L−R= 0

D Math ▲
X→A
2

Bước 2: Tìm nhân tử chung của phương trình - bất phương trình

1. Nếu phương trình có nghiệm vô tỷ

Sử dụng chức năng TABLE của máy tính cầm tay khảo sát các hàm $f(X)$ có dạng như sau: $f(X)=\sqrt[n]{g(A)}+AX$ trong đó A chính là nghiệm phương trình tìm được và lưu vào đây, $g(x)$ là biểu thức trong căn. Lưu ý là phương pháp này chỉ giải quyết được nghiệm đơn và nghiệm kép, còn nghiệm bội ba trở lên thì không nên sử dụng phương pháp này.

Với giá trị START là 20, END là -20 và STEP là 1. Ta chọn số tương đối lớn thế này để đảm bảo là khảo sát hết, tránh xót trường hợp. Xem xét bảng giá trị của TABLE, chọn giá trị trong TABLE mà $f(X)$ nguyên, ví dụ ta có cặp $(X=m, f(X)=n)$ nguyên, khi đó biểu thức liên hợp của căn tìm được sẽ là $\sqrt[n]{g(x)}=mx+n$.

Ví dụ: Tìm liên hợp của phương trình: $(x+4)\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x-5$.

Sử dụng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay, ta tìm được một nghiệm phương trình $x\approx 3.302775638$ và lưu nghiệm này vào biến A.

D Math
(X+4)√X+2 −(X³−)▸
X= 3.302775638
L−R= 0

Dùng chức năng TABLE khảo sát hàm số $f(X)=\sqrt{A+2}+AX$.

D Math
f(X)=√A+2 +AX

Cuối cùng ta có bảng giá trị của TABLE, chọn giá trị $f(X)$ nguyên để tạo nhân tử.

D Math

	X	F(X)
14	-1	-1
15	0	2.3027
16	1	5.6055

-1

Dựa vào bảng giá trị của TABLE ta thấy với $x=-1$ thì $f(x)=-1$ là cặp số nguyên ta cần tìm.

Khi đó nhân tử cần nhóm của chúng ta sẽ là: $\sqrt{x+2}-x+1$.

Chú ý: Nếu nghiệm này là nghiệm bội bậc n thì nhân tử sẽ có dạng: $\left(\sqrt{f(x)}+ax+b\right)^n$.

2. Nếu phương trình có nghiệm hữu tỷ:

*** Nếu phương trình có một nghiệm hữu tỷ a và nghiệm đây là nghiệm bội n của phương trình thì khi đó phương trình luôn có nhân tử $(x-a)^n$ khi phân tích.

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $\sqrt{x+2}=2x^2+x-8\ (*)$

Phân tích: Dùng chức năng TABLE khảo sát khoảng nghiệm và dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta tìm được một nghiệm của phương trình là $x=2$. Sau khi kiểm tra ta nhận thấy đây là một nghiệm đơn của phương trình. Ta thay nghiệm $x=2$ vào căn $\sqrt{x+2}$ ta có $\sqrt{x+2}=2$, khi đó phương trình có nhân tử $\sqrt{x+2}-2$.

Lời giải: Điều kiện: $x\ge -2$, ta có:

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-2=2x^2+x-10\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(2x+5)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(2x+5-\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)=0\Leftrightarrow (x-2)\left[2(x+2)+\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+2}\right]=0$$

Với $x\ge -2$ thì $2(x+2)+\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+2}>0$ nên phương trình đã cho sẽ $\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x\in\{2\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $2(x^2-9x+10)\sqrt{x-1}+x^3-8x^2+6x+85=0\ (*)$

Phân tích: Dùng chức năng TABLE khảo sát khoảng nghiệm và dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta tìm được một nghiệm của phương trình là $x=5$. Sau khi kiểm tra ta nhận thấy đây là một nghiệm kép của phương trình, tức phương trình sẽ có nhân tử $(x-5)^2$.

Thay $x=5$ vào các căn có trong phương trình, ta có $\sqrt{x-1}=2$ hay ta sẽ tách nhân tử của phương trình thành $\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=x+3-4\sqrt{x-1}$ do tính chất nghiệm kép.

Lời giải: Điều kiện: $x\ge 1$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow (x^2-9x+10)\left(x+3-4\sqrt{x-1}\right)=2(x^3-8x^2+6x+85)+(x+3)(x^2-9x+10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-5)^2(x^2-9x+10)}{x+3+4\sqrt{x-1}}=(x-5)^2(3x+8)\Leftrightarrow (x-5)^2\left(3x+8-\frac{x^2-9x+10}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)=0$$

Ta có $3x+8-\dfrac{x^2-9x+10}{x+3+4\sqrt{x-1}}=\dfrac{2x^2+26x+14+4(3x+8)\sqrt{x-1}}{x+3+4\sqrt{x-1}}>0$ với $\forall x\ge 1$.

Khi đó phương trình tương đương với $(x-5)^2=0\Leftrightarrow x=5$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\in\{5\}$.

*** Nếu phương trình có nhiều hơn 1 nghiệm hữu tỷ, ở đây mình sẽ xét trường hợp hai nghiệm hữu tỷ, các trường hợp nhiều hơn 2 nghiệm sẽ tương tự như trường hợp này. Giả sử phương trình có hai nghiệm hữu tỷ $x=\alpha$ và $x=\beta$ thì trên thực tế ta cũng có thể phân tích lần lượt từng nghiệm theo nhân tử $(x-\alpha)^m$ và $(x-\beta)^n$ với m,n là bậc nghiệm tương ứng của α,β như trường hợp 1 nghiệm như trên, nhưng vì làm như vậy sẽ khiến chúng ta tốn nhiều thời gian khi phân tích nhân tử và bài giải sẽ không được ngắn gọn. Để giúp quyết điều này chúng ta sẽ đưa ra một giải pháp đặt nhân tử mang tính tối ưu triệt để sao cho bài toán đơn giản và ngắn gọn nhất. Ta có $m+n$ là tổng bậc của hai nghiệm, khi đó các căn thức có trong căn sẽ liên hợp với một đa thức có cũng có bậc là $m+n-1$, tức là phương trình sẽ có nhân tử ở căn được viết dưới dạng

$$\left[\sqrt[p]{g(x)}+\left(a_0x^{m+n-1}+a_1x^{m+n-2}+...+a_{m+n-1}\right)\right]=0.$$

Ví dụ 1: Giải phương trình $3\sqrt{x+1}=3x^2-8x+3\ (*)$

Phân tích: Khảo sát bằng chức năng TABLE để xác định khoảng nghiệm của phương trình, dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay ta giải và tìm được hai nghiệm của phương trình là $x=0$

và $x=3$. Sau khi kiểm tra ta thấy hai nghiệm này đều là nghiệm đơn, tức phương trình sẽ có nhân tử là $x(x-3)=x^2-3x$. Đối với học sinh có tư duy tốt thì dựa vào nhân tử này có thể nhóm phương trình lại thành: $(*)\Leftrightarrow\left(x+3-3\sqrt{x+1}\right)+\left(3x^2-9x\right)=0$.

Nhưng phương pháp ở đây được đề cập để giúp tất cả các em, kể cả học sinh yếu chuyên đề này cũng có thể làm được, đặc biệt phương trình chức rất nhiều căn thì việc phân tích bằng tư duy của các em có học lực trung bình sẽ gặp khó khăn. Chính vì vậy, ta sẽ làm như sau:

Do bậc của nhân tử tìm được $x(x-3)$ là bậc 2 nên liên hợp của căn sẽ có dạng: $\sqrt{x+1}=ax+b$.

Thay lần lượt hai nghiệm $x=0$ và $x=3$ vào liên hợp, giải hệ phương trình, ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{0+1}=a.0+b\\ \sqrt{3+1}=a.3+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x+1}=\frac{x+3}{3}\text{ hay } x+3-3\sqrt{x+1}.$$

Lời giải: Điều kiện: $x\ge -1$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\left(3x^2-9x\right)+\left(x+3-3\sqrt{x+1}\right)=0\Leftrightarrow 3\left(x^2-3x\right)+\frac{x^2-3x}{x+3+3\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x\right)\left(3+\frac{1}{x+3+3\sqrt{x+1}}\right)=0\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x\in\{0;3\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $x^3-5x^2+10x-12+(3-x)\sqrt{7x+2}=0$ $(*)$

Phân tích: Dùng TABLE để khảo sát khoảng nghiệm của phương trình và dùng chức năng SOLVE của máy tính để giải, ta tìm được 3 nghiệm của phương trình là $x=1, x=2, x=3$.

Sau khi kiểm tra tính chất nghiệm bội ta thấy 3 nghiệm này đều là nghiệm đơn của phương trình. Tức là phương trình sẽ có nhân tử là $(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$. Tới đây nếu các bạn có tư duy tốt sẽ dễ dàng nhóm nhân tử như thế này:

$$(*)\Leftrightarrow\left(x^3-6x^2+11x-6\right)+\left[\left(x^2-x-6\right)-(x-3)\sqrt{7x+2}\right]=0.$$

Ta biến đổi theo cách tổng quát để tìm liên hợp cho các căn có trong phương trình. Nếu biểu thức có căn có nhân với một biểu thức khác thì ta lấy luôn nguyên cụm biểu thức luôn nhé các bạn.

Do phương trình có ba nghiệm nên theo công thức tổng quát thì liên hợp tạo thành sẽ có dạng như sau: $(x-3)\sqrt{7x+2}=ax^2+bx+c$. Thay lần lượt 3 nghiệm vào ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(1-3)\sqrt{7.1+2}=a+b+c\\ (2-3)\sqrt{7.2+2}=4a+2b+c\\ (3-3)\sqrt{7.3+2}=9a+b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=-6\\ 4a+2b+c=-4\\ 9a+3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=-6\end{cases}\Rightarrow(x-3)\sqrt{7x+2}=x^2-x-6$$

Lời giải: Điều kiện: $x\ge -\dfrac{2}{7}$. Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\left(x^3-6x^2+11x-6\right)+\left[\left(x^2-x-6\right)-(x-3)\sqrt{7x+2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-3)+(x-3)\left(x+2-\sqrt{7x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-3)\left(1+\frac{1}{x+2+\sqrt{7x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-3)=0\ \left(1+\frac{1}{x+2+\sqrt{7x+2}}>0\ \forall x\ge-\frac{2}{7}\right)\Leftrightarrow x=1\vee x=2\vee x=3$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x\in\{1;2;3\}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $6x^4-33x^3+2x^2+75x-50+(x-1)(x-5)\sqrt{3x-2}=0$ (*)

Phân tích: Dùng chức năng TABLE để khảo sát các khoản nghiệm và chức năng SOLVE của máy tính ta giải tìm được 2 nghiệm của phương trình là $x=1$ và $x=5$. Kiểm tra ta thấy $x=1$ là một nghiệm kép của phương trình và $x=5$ là một nghiệm đơn. Tức là phương trình sẽ có nhân tử là $(x-1)^2(x-5)=x^3-7x^2+11x-5$. Nếu giải bằng tư duy thì tới bước này ta sẽ lấy đa thức $6x^4-33x^3+2x^2+75x-50$ chia cho đa thức $x^3-7x^2+11x-5$ ta được thương là $6x+9$ và số dư là $-x^2+6x-5$, tức là $6x^4-33x^3+2x^2+75x-50=(x^3-7x^2+11x-5)(6x+9)-(x^2-6x+5)$. Hay khi đó ta có $(*)\Leftrightarrow(x^3-7x^2+11x-5)(6x+9)=(x^2-6x+5)(\sqrt{3x-2}-1)$ và giải ra ngay kết quả.

Theo cách làm tổng quát thì ta có thể làm như sau: Do bậc của nhân tử chung ta tìm được là bậc ba nên theo công thức liên hợp căn thì nó sẽ có dạng: $(x-1)(x-5)\sqrt{3x-2}=ax^2+bx+c$. Do phương trình có nghiệm kép tại $x=1$ nên $x=1$ cũng là nghiệm phương trình đạo hàm của nó. Thay 2 nghiệm và đạo hàm tại nghiệm kép, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(1-1)(1-5)\sqrt{3.1+2}=a+b+c\\(5-1)(5-5)\sqrt{3.5+2}=25a+5b+c\\\dfrac{d}{dx}\left[(x-1)(x-5)\sqrt{3x-2}\right]_{x=1}=2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=0\\25a+5b+c=0\\2a+b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-6\\c=5\end{cases}$$

$\Rightarrow(x-1)(x-5)\sqrt{3x-2}=x^2-6x+5$ là nhân tử cần tìm của phương trình.

Lời giải: Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}$. Ta có:

$(*)\Leftrightarrow6x^4-33x^3+3x^2+69x-45+(x-1)(x-5)\sqrt{3x-2}-(x^2-6x+5)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2(x-5)(6x+9)=(x-1)(x-5)(\sqrt{3x-2}-1)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x-5)\left(6x+9+\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2(x-5)=0\ \left(6x+9+\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+1}>0\ \forall x\ge\dfrac{2}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x\in\{1;5\}$.

Bài tập tự luyện:

- **Bài 1**: $(7x-9)\sqrt{7x-10}=2x^3-7x^2+11x$
- **Bài 2**: $(x+4)\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x+5$
- **Bài 3**: $10x^2+3x-6-2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=0$
- **Bài 4**: $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$
- **Bài 5**: $(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}=10+4x-8x^2$
- **Bài 6**: $x^3-2x^2+3x+3\sqrt{10-x^2}=11$
- **Bài 7**: $15x^2+12x+12=10(2x+1)\sqrt{x^2+3}$
- **Bài 8**: $x^2+5x=4\left(1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}\right)$
- **Bài 9**: $x^3+x\sqrt{x}=(x+4)(x+5)$
- **Bài 10**: $1+3x=(x-x^2)\left(5+\sqrt{15+6x-9x^2}\right)$

- **Bài 11**: $(2x+2)\sqrt{x^2+x+2}=x^2+5x+2$
- **Bài 12**: $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}$
- **Bài 13**: $8x^2+3x+(4x^2+x-2)\sqrt{x+4}=4$
- **Bài 14**: $4x^2-3x=(x+2)\sqrt{2x^2+2x-1}$
- **Bài 15**: $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$
- **Bài 16**: $(5x-16)\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x-20}\left(5+\sqrt{5x+9}\right)$
- **Bài 17**: $(6x^2+12x-6)\sqrt{2x-1}=x^3+22x^2-11x$
- **Bài 18**: $6x^3+15x^2+x+1=(3x^2+9x+1)\sqrt{x^2-x+1}$
- **Bài 19**: $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}<\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$
- **Bài 20**: $\dfrac{4-x}{\sqrt{3-x}}+\sqrt{3-x}\le\sqrt{5+2x}$
- **Bài 21**: $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$
- **Bài 22**: $\sqrt{x+8}=\dfrac{3x^2+7x+8}{4x+2}$
- **Bài 23**: $\sqrt{x^2+x+2}=\dfrac{3x^2+3x+2}{3x+1}$
- **Bài 24**: $\sqrt{x+2}=\dfrac{x+2+x\sqrt{2x+1}}{x+\sqrt{2x+1}}$
- **Bài 25**: $3x^2+2x+3=(3x+1)\sqrt{x^2+3}$
- **Bài 26**: $2x^2+2x+1=(4x-1)\sqrt{x^2+1}$
- **Bài 27**: $2x^2-3x+2=x\sqrt{3x-2}$
- **Bài 28**: $x^3-3x^2+2(x+2)\sqrt{x+2}=6x$
- **Bài 29**: $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$
- **Bài 30**: $2(x-2)\sqrt{2x-5}=x^2-2x+4$
- **Bài 31**: $x^3+2x+(3x-7)\sqrt{5-3x}=0$
- **Bài 32**: $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$
- **Bài 33**: $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$
- **Bài 34**: $\sqrt{2x^3-3x^2+6x+11}-\sqrt{5-x}=2\sqrt{3}$
- **Bài 35**: $\left(2x^2+1+2\sqrt{3-x}\right)x-7\sqrt{3-x}=0$
- **Bài 36**: $\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}=6$
- **Bài 37**: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3}=4-x$
- **Bài 38**: $2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}+3x^2-30x+71=0$
- **Bài 39**: $4x^3+x-(x+1)\sqrt{2x+1}=0$
- **Bài 40**: $x(4x^2+1)+(x-3)\sqrt{5-2x}=0$